INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE STOCHASTIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Dr. B. Klar

A

Name:

Vorname:

Matr.–Nr.:

Klausur zum Fach

GRUNDLAGEN DER WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE UND STATISTIK

für Studierende der INFORMATIK

(zum Erwerb eines Übungsscheines)

Datum: **26. Februar 2004**

Dauer: **120 Minuten**

Achtung:

Bei dieser Klausur werden **nur** diejenigen Ergebnisse gewertet, die in die vorgesehenen Kästchen auf dem extra ausgegebenen

Lösungsblatt Version A

eingetragen sind! Die Herleitung wird **nicht** bewertet! **Überprüfen Sie die Version Ihres Lösungsblattes!**
Die Aufgabenblätter werden nicht abgegeben und korrigiert!

Aufgabe A1 (10 Punkte)

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_{10}, y_{10})$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	0.6	1.9	2.8	3.6	5.1	5.7	6.7	8.1	9.4	10.4
y_j	10	13.3	7.8	7.2	7.2	1.7	3.1	0	−3.1	−9.5

a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel $\bar{x}$, $\bar{y}$, die Stichproben-Standardabweichungen s_x, s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy}.
Hinweis:

$$\sum_{j=1}^{10} x_j = 54.3, \ \sum_{j=1}^{10} x_j^2 = 390.29, \ \sum_{j=1}^{10} y_j = 37.7, \ \sum_{j=1}^{10} y_j^2 = 553.77, \ \sum_{j=1}^{10} x_j \cdot y_j = 18.27.$$

$\bar{x} =$ $\boxed{}$ $\bar{y} =$ $\boxed{}$

$s_x =$ $\boxed{}$ $s_y =$ $\boxed{}$ $r_{xy} =$ $\boxed{}$

b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x.

$a^* =$ $\boxed{}$ $b^* =$ $\boxed{}$

c) Berechnen Sie das 0.15-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.15}$ von $(y_1, \ldots, y_{10})$.

$\bar{y}_{0.15} =$ $\boxed{}$

d) Berechnen Sie den Quartilsabstand von $(y_1, \ldots, y_{10})$.

Quartilsabstand $=$ $\boxed{}$

Aufgabe A2 (10 Punkte)

X, Y seien zwei Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1, c\}$, $c \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, bzw. $\{0, 1, 2\}$. Die folgende Tabelle gibt die gemeinsame Verteilung $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ des Zufallsvektors (X, Y) für die Werte $(i, j) \in \{0, 1, c\} \times \{0, 1, 2\}$ an.

Y \ X	$i = 0$	$i = 1$	$i = c$
$j = 0$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
$j = 1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$j = 2$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

a) Berechnen Sie die Randverteilung von X und den Erwartungswert $\mathbb{E}X$. Für welche c gilt $\mathbb{E}X = 1$?

i	0	1	c
$\mathbb{P}(X = i)$	$\boxed{}$	$\boxed{}$	$\boxed{}$

$\mathbb{E}X = \boxed{}$ $\quad c = \boxed{}$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > 0, Y = 2)$.

$$\mathbb{P}(X > 0, Y = 2) = \boxed{}$$

c) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y = 2|X > 0)$.

$$\mathbb{P}(Y = 2|X > 0) = \boxed{}$$

d) Es sei $c = 2$ sowie $Z := X \cdot Y$. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}Z$, das zweite Moment $\mathbb{E}Z^2$ und die Varianz $V(Z)$.

$\mathbb{E}Z = \boxed{}$ $\quad \mathbb{E}Z^2 = \boxed{}$ $\quad V(Z) = \boxed{}$

Aufgabe A3 (10 Punkte)

Es sei X eine standardnormal-verteilte Zufallsvariable, kurz $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Weiter sei $Y := 2X - 3$.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}Y$ und die Varianz $V(Y)$.

$$\mathbb{E}Y = \boxed{} \qquad V(Y) = \boxed{}$$

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(-3 < Y \leq 1)$.

$$\mathbb{P}(-3 < Y \leq 1) = \boxed{}$$

c) Bestimmen Sie das 0.975-Quantil $q_{0.975}$ der Zufallsvariablen Y.

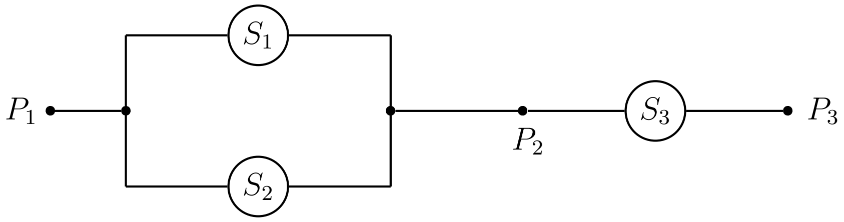
$$q_{0.975} = \boxed{}$$

d) Es sei $Z := 2X$. Bestimmen Sie die Kovarianz $C(Y, Z)$.

$$C(Y, Z) = \boxed{}$$

Aufgabe A4 (10 Punkte)

Zwischen 3 Punkten P_1, P_2 und P_3 verläuft folgendes Leitungsnetz:



Dabei sind S_1, S_2, S_3 störanfällige Stellen. Die Zufallsvariablen X_i seien definiert als

$$X_i = \begin{cases} 0, & S_i \text{ ist unterbrochen,} \\ 1, & S_i \text{ ist nicht unterbrochen,} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3.$$

Ferner seien X_1, X_2, X_3 stochastisch unabhängig mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $i = 1, 2, 3$, für ein $0 < p < 1$.

a) Stellen Sie das Ereignis $A :=$ {„P_1 ist mit P_2 verbunden"} mit Hilfe der Zufallsvariablen X_1 und X_2 dar.

$$A \;=\; \left\{ X_1 = \boxed{} \right\} \boxed{} \left\{ X_2 = \boxed{} \right\}$$

b) Stellen Sie das Ereignis $B :=$ {„P_1 ist mit P_3 verbunden"} mit Hilfe des Ereignisses A und der Zufallsvariablen X_3 dar.

$$B \;=\; A \boxed{} \left\{ X_3 = \boxed{} \right\}$$

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(B)$.

$$\mathbb{P}(B) = \boxed{}$$

d) Die Zufallsvariable $Y := X_1 + X_2$ besitzt die Binomial-Verteilung $Bin(n, q)$. Bestimmen Sie die Parameter n und q.

$$n = \boxed{} \qquad q = \boxed{}$$

e) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $g_Y(s)$, $|s| \leq 1$, von Y.

$$g_Y(s) = \boxed{}, \quad |s| \leq 1.$$

Aufgabe A5 (6 Punkte)

Ein Merkmal habe die Dichte

$$t \mapsto f_\vartheta(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\, t} \exp\left(-\dfrac{(\log(t)-\vartheta)^2}{2}\right) & , \quad \text{falls } t > 0, \\ 0 & , \quad \text{falls } t \leq 0, \end{cases}$$

wobei $\vartheta \in \mathbb{R}$ ein unbekannter Parameter ist. Der Parameter ϑ soll aufgrund einer unabhängigen Stichprobe $x = (x_1, \dots, x_n)$ geschätzt werden, wobei $x_1 > 0, \dots, x_n > 0$ sind. Der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n)$ für ϑ ist von der Form

$$\hat{\vartheta}(x_1, \dots, x_n) = c_1 \cdot \sum_{j=1}^{n} \log(c_2 \cdot x_j - c_3)$$

mit gewissen Konstanten c_1, c_2, c_3. Bestimmen Sie die Konstanten c_1, c_2 und c_3.

$c_1 = \boxed{}$ $c_2 = \boxed{}$ $c_3 = \boxed{}$

Aufgabe A6 (4 Punkte)

Eine Münze mit den Symbolen „Zahl“ und „Wappen“ soll auf ihre Echtheit überprüft werden, d.h es soll überprüft werden ob,

$$\mathbb{P}(\{\text{„Zahl“ geworfen}\}) \;=\; \mathbb{P}(\{\text{„Wappen“ geworfen}\}) \;=\; \frac{1}{2}$$

gilt. Dem folgenden Zufallsexperiment werden die Zufallsvariablen

$$X_i \;=\; \begin{cases} 1, & \text{falls „Zahl“ geworfen,} \\ 0, & \text{falls „Wappen“ geworfen,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n,$$

zugrunde gelegt. Dabei seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ stochastisch unabhängig und jeweils $Bin(1, \vartheta)$-verteilt. Der Parameter $0 < \vartheta < 1$ sei unbekannt. Nun wird die Münze $n = 1000$ Mal geworfen und 513 Mal das Symbol „Zahl“ beobachtet.

a) Bestimmen Sie das Stichproben-Mittel $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

$$\bar{X}_n = \boxed{}$$

b) Ein asymptotisches Konfidenzintervall $\mathcal{C} = [l_n^*, L_n^*]$ für ϑ zum (Konfidenz-)Niveau $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$, ist durch

$$l_n^* \;=\; l_n^*(X_1, \dots, X_n) \;=\; \bar{X}_n \boxed{} \frac{h}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}\;,$$

$$L_n^* \;=\; L_n^*(X_1, \dots, X_n) \;=\; \bar{X}_n \boxed{} \frac{h}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}$$

gegeben, wobei $h = \boxed{}$ ist. Vervollständigen Sie die fehlenden Angaben in den Formel für l_n^*, L_n^* und h. Berechnen Sie $\mathcal{C}$ für $\alpha = 0.05$.

$$l_n^* = \boxed{} \qquad L_n^* = \boxed{}$$

INSTITUT FÜR MATHEMATISCHE STOCHASTIK
UNIVERSITÄT KARLSRUHE
Dr. B. Klar

B

Name:

Vorname:

Matr.–Nr.:

Klausur zum Fach

GRUNDLAGEN DER WAHRSCHEINLICHKEITSTHEORIE UND STATISTIK

für Studierende der INFORMATIK

(zum Erwerb eines Übungsscheines)

Datum:	**26. Februar 2004**
Dauer:	**120 Minuten**

Achtung:
Bei dieser Klausur werden **nur** diejenigen Ergebnisse gewertet, die in die vorgesehenen Kästchen auf dem extra ausgegebenen

Lösungsblatt Version B

eingetragen sind! Die Herleitung wird **nicht** bewertet! **Überprüfen Sie die Version Ihres Lösungsblattes!**
Die Aufgabenblätter werden nicht abgegeben und korrigiert!

Aufgabe B1 (10 Punkte)

Gegeben sei eine Urliste mit den Paaren $(x_1, y_1), \ldots, (x_{10}, y_{10})$

j	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_j	1.1	1.6	2.9	3.9	5.2	6.1	7.1	7.6	8.9	9.8
y_j	14.2	14.3	1.2	7.4	5.6	3.9	-0.9	1	-8.9	-7.5

a) Berechnen Sie die Stichprobenmittel $\bar{x}$, $\bar{y}$, die Stichproben-Standardabweichungen s_x, s_y und den empirischen Korrelationskoeffizienten r_{xy}.

Hinweis:

$$\sum_{j=1}^{10} x_j = 54.2,\ \sum_{j=1}^{10} x_j^2 = 375.06,\ \sum_{j=1}^{10} y_j = 30.3,\ \sum_{j=1}^{10} y_j^2 = 646.17,\ \sum_{j=1}^{10} x_j \cdot y_j = -27.75.$$

$\bar{x} =$ $\boxed{}$ $\bar{y} =$ $\boxed{}$

$s_x =$ $\boxed{}$ $s_y =$ $\boxed{}$ $r_{xy} =$ $\boxed{}$

b) Bestimmen Sie die zugehörige Regressionsgerade $y = a^* + b^* \cdot x$ von y auf x.

$a^* =$ $\boxed{}$ $b^* =$ $\boxed{}$

c) Berechnen Sie das 0.15-getrimmte Stichprobenmittel $\bar{y}_{0.15}$ von $(y_1, \ldots, y_{10})$.

$\bar{y}_{0.15} =$ $\boxed{}$

d) Berechnen Sie den Quartilsabstand von $(y_1, \ldots, y_{10})$.

Quartilsabstand $=$ $\boxed{}$

Aufgabe B2 (10 Punkte)

X, Y seien zwei Zufallsvariablen mit Werten in $\{0, 1, c\}$, $c \in \{2, 3, 4, \ldots\}$, bzw. $\{0, 1, 2\}$. Die folgende Tabelle gibt die gemeinsame Verteilung $\mathbb{P}(X = i, Y = j)$ des Zufallsvektors (X, Y) für die Werte $(i, j) \in \{0, 1, c\} \times \{0, 1, 2\}$ an.

$Y \backslash X$	$i = 0$	$i = 1$	$i = c$
$j = 0$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$
$j = 1$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$
$j = 2$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$

a) Berechnen Sie die Randverteilung von X und den Erwartungswert $\mathbb{E}X$. Für welche c gilt $\mathbb{E}X = \frac{5}{4}$?

i	0	1	c
$\mathbb{P}(X = i)$			

$\mathbb{E}X =$ $\qquad$ $c =$

b) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(X > 0, Y = 1)$.

$$\mathbb{P}(X > 0, Y = 1) = \boxed{}$$

c) Berechnen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(Y = 1 | X > 0)$.

$$\mathbb{P}(Y = 1 | X > 0) = \boxed{}$$

d) Es sei $c = 3$ sowie $Z := X \cdot Y$. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}Z$, das zweite Moment $\mathbb{E}Z^2$ und die Varianz $V(Z)$.

$\mathbb{E}Z =$ $\qquad$ $\mathbb{E}Z^2 =$ $\qquad$ $V(Z) =$

Aufgabe B3 (10 Punkte)

Es sei X eine standardnormal-verteilte Zufallsvariable, kurz $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Weiter sei $Y := 3X - 1$.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}Y$ und die Varianz $V(Y)$.

$$\mathbb{E}Y = \boxed{} \qquad V(Y) = \boxed{}$$

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(-1 < Y \leq 2)$.

$$\mathbb{P}(-1 < Y \leq 2) = \boxed{}$$

c) Bestimmen Sie das 0.975-Quantil $q_{0.975}$ der Zufallsvariablen Y.

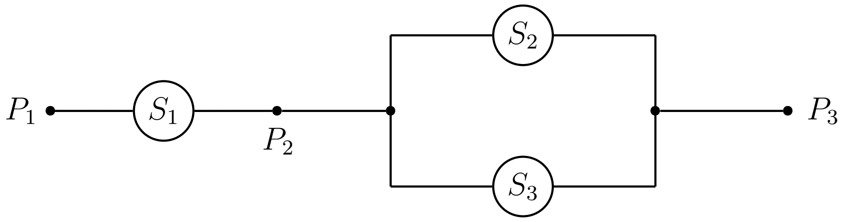
$$q_{0.975} = \boxed{}$$

d) Bestimmen Sie die Kovarianz $C(X,Y)$.

$$C(X,Y) = \boxed{}$$

Aufgabe B4 (10 Punkte)

Zwischen 3 Punkten P_1, P_2 und P_3 verläuft folgendes Leitungsnetz:



Dabei sind S_1, S_2, S_3 störanfällige Stellen. Die Zufallsvariablen X_i seien definiert als

$$X_i = \begin{cases} 0, & S_i \text{ ist unterbrochen,} \\ 1, & S_i \text{ ist nicht unterbrochen,} \end{cases} \quad i = 1, 2, 3.$$

Ferner seien X_1, X_2, X_3 stochastisch unabhängig mit $\mathbb{P}(X_i = 1) = p$, $i = 1, 2, 3$, für ein $0 < p < 1$.

a) Stellen Sie das Ereignis $A :=$ {„P_2 ist mit P_3 verbunden"} mit Hilfe der Zufallsvariablen X_2 und X_3 dar.

$$A = \left\{ X_2 = \boxed{} \right\} \boxed{} \left\{ X_3 = \boxed{} \right\}$$

b) Stellen Sie das Ereignis $B :=$ {„P_1 ist mit P_3 verbunden"} mit Hilfe der Zufallsvariablen X_1 und des Ereignisses A dar.

$$B = \left\{ X_1 = \boxed{} \right\} \boxed{} A$$

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(B)$.

$$\mathbb{P}(B) = \boxed{}$$

d) Die Zufallsvariable $Y := X_1 + X_2$ besitzt die Binomial-Verteilung $Bin(n, q)$. Bestimmen Sie die Parameter n und q.

$$n = \boxed{} \quad q = \boxed{}$$

e) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $g_Y(s)$, $|s| \leq 1$, von Y.

$$g_Y(s) = \boxed{}, \quad |s| \leq 1.$$

Aufgabe B5 (6 Punkte)

Ein Merkmal habe die Dichte

$$t \mapsto f_\vartheta(t) := \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{\pi}\, t} \exp\left(-(\log(t) - \vartheta)^2\right) , & \text{falls } t > 0, \\ 0 , & \text{falls } t \leq 0, \end{cases}$$

wobei $\vartheta \in \mathbb{R}$ ein unbekannter Parameter ist. Der Parameter ϑ soll aufgrund einer unabhängigen Stichprobe $x = (x_1, \ldots, x_n)$ geschätzt werden, wobei $x_1 > 0, \ldots, x_n > 0$ sind. Der Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\vartheta}(x_1, \ldots, x_n)$ für ϑ ist von der Form

$$\hat{\vartheta}(x_1, \ldots, x_n) = c_1 \cdot \sum_{j=1}^{n} \log(c_2 \cdot x_j - c_3)$$

mit gewissen Konstanten c_1, c_2, c_3. Bestimmen Sie die Konstanten c_1, c_2 und c_3.

$c_1 = \boxed{}$ $c_2 = \boxed{}$ $c_3 = \boxed{}$

Aufgabe B6 (4 Punkte)

Eine Münze mit den Symbolen „Zahl“ und „Wappen“ soll auf ihre Echtheit überprüft werden, d.h es soll überprüft werden ob,

$$\mathbb{P}(\{\text{„Zahl“ geworfen}\}) \;=\; \mathbb{P}(\{\text{„Wappen“ geworfen}\}) \;=\; \frac{1}{2}$$

gilt. Dem folgenden Zufallsexperiment werden die Zufallsvariablen

$$X_i \;=\; \begin{cases} 1, & \text{falls „Zahl“ geworfen,} \\ 0, & \text{falls „Wappen“ geworfen,} \end{cases} \qquad i = 1, \dots, n,$$

zugrunde gelegt. Dabei seien $X_1, X_2, \dots, X_n$ stochastisch unabhängig und jeweils $Bin(1, \vartheta)$-verteilt. Der Parameter $0 < \vartheta < 1$ sei unbekannt. Nun wird die Münze $n = 1000$ Mal geworfen und 487 Mal das Symbol „Zahl“ beobachtet.

a) Bestimmen Sie das Stichproben-Mittel $\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$.

$$\bar{X}_n = \boxed{}$$

b) Ein asymptotisches Konfidenzintervall $\mathcal{C} = [l_n^*, L_n^*]$ für ϑ zum (Konfidenz-)Niveau $1 - \alpha$, $0 < \alpha < 1$, ist durch

$$l_n^* \;=\; l_n^*(X_1, \dots, X_n) \;=\; \bar{X}_n \,\boxed{}\, \frac{h}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}\;,$$

$$L_n^* \;=\; L_n^*(X_1, \dots, X_n) \;=\; \bar{X}_n \,\boxed{}\, \frac{h}{\sqrt{n}} \sqrt{\bar{X}_n(1 - \bar{X}_n)}$$

gegeben, wobei $h = \boxed{}$ ist. Vervollständigen Sie die fehlenden Angaben in den Formel für l_n^*, L_n^* und h. Berechnen Sie $\mathcal{C}$ für $\alpha = 0.05$.

$$l_n^* = \boxed{} \qquad L_n^* = \boxed{}$$