Klausurprüfung in Physik Frühjahr 2001
Informatik

---

1. Ein Satellit bewege sich in der Höhe h = 200 km über der Erdoberfläche mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn.
   a) Berechnen Sie die in dieser Höhe wirksame Erdbeschleunigung.
   b) Wie groß ist die Geschwindigkeit v des Satelliten? Welche Zeit T benötigt er für einen Umlauf?
   c) Zeigen Sie, dass allgemein die kinetische Energie eines Satelliten auf einer Kreisbahn (bis auf das Vorzeichen) gleich der halben potentiellen Energie ist.

2. Eine dünnwandige Hohlwalze und eine homogene Vollwalze rollen eine schiefe Ebene hinab.
   a) Das Trägheitsmoment eines Vollzylinders ist $J = \frac{1}{2}mR^2$. Leiten Sie diese Beziehung ab.
   b) Wie groß sind nach Durchlaufen der Höhendifferenz h jeweils die Geschwindigkeiten?
   c) Wie hängen die Geschwindigkeiten von der Masse m, der Länge L und dem Radius R der jeweiligen Walze ab?
   d) Welche Geschwindigkeit hätte ein reibungsfrei gleitender Körper nach Durchlaufen der gleichen Höhendifferenz h?

3. Ein Kondensator bestehe aus zwei konzentrischen leitenden Kugelschalen mit den Radien R_1 und R_2 (die Dicke der Schalen werde vernachlässigt). Die innere Schale trage die Ladung $+Q$ und die äußere die Ladung $-Q$.

   a) Geben Sie zunächst das Potential $\phi(R)$ an der Oberfläche einer einzelnen Kugel an. Bestimmen Sie dann die Potentialdifferenz U zwischen den beiden Schalen.
   b) Geben Sie die Kapazität C dieses Kondensators an.
   c) Skizzieren Sie den Verlauf der elektrischen Feldlinien.
   d) Zeigen Sie, dass die Kapazität für $R_1 \approx R_2$ in den Ausdruck für die Kapazität eines Plattenkondensators übergeht. Setzen Sie $d = R_2 - R_1 << R_1$.

4. Ein mit der Ladung Q_0 aufgeladener Kondensator der Kapazität C wird zum Zeitpunkt $t = 0$ mit einer Spule der Induktivität L verbunden.

   a) Wie hängen die Spannung U_C am Kondensator und die Induktionsspannung U_L mit Q bzw. I zusammen?
   Leiten Sie aus der Spannungsbilanz im LC-Kreis eine Differentialgleichung für $Q(t)$ her.
   b) Zeigen Sie, daß $Q(t) = Q_0 \cos(\omega t)$ eine Lösung der Differentialgleichung ist. Wie groß ist ω?
   Skizzieren Sie den zeitlichen Verlauf von $Q(t)$ und $I(t)$.
   c) Wie groß ist die in der Spule gespeicherte Energie? Mit welcher Frequenz schwingt sie um ihren Mittelwert? Skizze!

5. a) Wie groß ist die Masse eines Helium-Atoms? (Molmasse: A_{He}=4g/mol)
   b) Wie groß ist die mittlere thermische Geschwindigkeit $v_m = \sqrt{\overline{v^2}}$ eines Heliumatoms bei 25° C?
   c) Skizzieren und vergleichen Sie die Temperaturabhängigkeit der spezifischen Wärme von Helium He und Sauerstoff O_2 bis hin zu hohen Temperaturen. Warum verhalten sich die beiden Gase unterschiedlich?

6. Zwei kleine Lautsprecher sollen als punktförmige Schallquellen betrachtet werden. Sie werden von demselben Tongenerator phasengleich gespeist. Ihr Abstand beträgt d. Ein Schallempfänger wird in der Entfernung h (mit $h >> d$) parallel zur Verbindungslinie der beiden Lautsprecher verschoben. Dabei stellt man eine örtlich sich verändernde Schallintensität fest.
   a) Unter welchen (kleinen) Winkeln treten Maxima und Minima der Amplitude auf? (Skizze!)
   b) Skizzieren Sie die Intensitätsverteilung längs des Verschiebungsweges und geben Sie die Abstände der Maxima 1. und 2. Ordnung vom Maximum nullter Ordnung an.
   c) Mit welcher Frequenz ν müssen die Lautsprecher abstrahlen, damit das nullte und das erste Maximum der Intensität voneinander einen Abstand a = 5 m haben, wenn d = 50 cm und h = 50 m ist? (Schallgeschwindigkeit in Luft: v_S = 340 m/s).
   d) Wie ändert sich die Intensitätsverteilung gegenüber dem Fall b), wenn die beiden Lautsprecher gegenphasig, d. h. um 180° phasenverschoben abstrahlen?

7. Altersbestimmung mit der C14-Methode
Das Kohlenstoffisotop $^{14}_{6}C$ ist ein β-Strahler mit der Halbwertszeit $T_{1/2}$ = 5730 Jahre und wird laufend durch die kosmische Strahlung in der Atmosphäre erzeugt. In einem lebendigen Organismus steht die Zahl der $^{14}_{6}C$-Atome zur Zahl der Atome des stabilen $^{12}_{6}C$-Isotops im Verhältnis $(1{,}3 \cdot 10^{-12}:1)$.

a) Auf welchen Bruchteil sinkt die Zahl der in einer abgeschlossenen Probe (d.h. kein Kohlenstoffaustausch mit der Umgebung) enthaltenen $^{14}_{6}C$-Atome nach 22920 Jahren?
b) Ein historischer Tierknochen mit einem Kohlenstoffgehalt von 240 Gramm zeigt eine $^{14}_{6}C$-Aktivität von 1,5 Zerfällen/Sekunde. Berechnen Sie das Alter des Knochens. Sie können dabei die Zahl der $^{12}_{6}C$-Atome gleich der Gesamtzahl der Kohlenstoffatome setzen.
c) Wieviele Protonen und Neutronen bilden den Atomkern des bei dem β-Zerfall entstehenden Stickstoffs? Geben Sie die Zerfallsgleichung an.

8. Eine Rakete bewege sich relativ zu einem ruhenden Beobachter mit 98 % der Lichtgeschwindigkeit c_0.

a) Um welchen Faktor ist die Masse der Rakete im Vergleich zu ihrer Ruhemasse m_0 verändert?
b) Wieviel Zeit ist nach der Uhr des ruhenden Beobachters vergangen, wenn nach der Uhr, die sich mit der Rakete bewegt, ein Jahr vergangen ist?
c) Wie ändern sich für den ruhenden Beobachter die linearen Abmessungen der Körper in der Rakete in Richtung ihrer Bewegung sowie senkrecht dazu?
d) Wie ändert sich folglich für den Beobachter die Dichte der Stoffe in der bewegten Rakete im Vergleich zum Ruhezustand?

9. a) Zeigen Sie, daß eine ebene Welle $\psi(\vec{x},t) = \psi_0 \cdot \exp(i(\vec{k}\vec{x}-\omega t))$ eine Eigenfunktion zum Energieoperator $\hat{E} = i\hbar \frac{\partial}{\partial t}$ ist. Welchen Energie-Eigenwert erhält man?
b) Wie lauten die Operatoren für den Impuls $\vec{p}$, den Ort $\vec{r}$ und die kinetische Energie E_{kin}?
c) Konstruieren Sie aus diesen Operatoren und dem Energieerhaltungssatz die zeitabhängige Schrödingergleichung.
d) Welche physikalische Bedeutung hat die Wellenfunktion ?

10. a) Skizzieren Sie die Prozesse der Absorption, der spontanen und stimulierten Emission von Licht am Atom.
b) Welche Energie und Frequenz haben die Photonen, die beim Übergang vom Zustand n = 2 in den Zustand n = 1 des Wasserstoff-Atoms emittiert werden?
c) Beschreiben Sie die Funktionsweise eines 3-Niveau-Lasers: Skizzieren Sie das Energieniveau-Schema und erläutern Sie das Prinzip.

Erdbeschleunigung: $g = 9{,}81$ m/s²; Erdradius: $R_E = 6{,}4 \cdot 10^6$m;
Avogadro-Konstante: $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ Teilchen/mol; Boltzmann-Konstante $k_B = 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K;
Rydberg-Konstante: $Ry = 13{,}6$ eV; Elementarladung: $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$C;
Plancksches Wirkungsquantum: $h = 6{,}6 \cdot 10^{-34}$ Js.

Aufgabe:	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
max. Punktzahl:	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Physik für Informatiker Frühjahr 2001 Lösungen

1. a) Aus dem Gravitationsgesetz

$$F = m_{Sat} \cdot g(r) = \gamma \cdot \frac{m_{Sat} \cdot m_{Erde}}{r^2}$$

folgt für die Erdoberfläche:

$$g(R_E) = 9.81 \; m/s^2 = \gamma \cdot \frac{m_{Erde}}{R_E^2}$$

und für den Satelliten:

$$g(R_E+h) = \gamma \cdot \frac{m_{Erde}}{(R_E+h)^2}$$

$$\rightarrow \quad g(R_E+h) = \frac{R_E^2}{(R_E+h)^2} \cdot g(R_E)$$

$$= 0.94 \cdot g(R_E) = 9.22 \; m/s^2$$

b) Der Satellit erfährt die Zentripetalbeschleunigung

$$g(R_E+h) = \frac{v^2}{R_E+h}.$$

Daraus folgt $v = \sqrt{(R_E+h) \cdot g(R_E+h)}$

$$= \sqrt{6.6 \cdot 10^6 \cdot 9.22} \; m/s$$

$$= 7.8 \; km/s$$

Die Umlaufzeit beträgt

$$T = 2\pi \cdot r / v$$

$$= 2\pi (R_E+h) / v$$

$$= 5317 \; s$$

$$= 88.6 \; min$$

c) Die kinetische Energie des Satelliten ist

$$E_{kin} = \frac{1}{2} m_{sat.} \cdot v^2$$

Physik für Informatiker Frühjahr 2001 Lösungen

1. Forts.

Die potentielle Energie beträgt $E_{pot} = \gamma \frac{m_{Sat} \cdot m_{Erde}}{r}$

Aus der Gleichheit der Zentripetalkraft und der Gravitationskraft

$$\frac{m_{Sat}\, v^2}{r} = \gamma \frac{m_{Sat}\, m_{Erde}}{r^2}$$

kann ein Ausdruck für v^2 hergeleitet werden: $v^2 = \frac{\gamma\, m_{Erde}}{r}$.

Damit folgt $E_{kin} = \frac{1}{2} \gamma \frac{m_{Sat.} \cdot m_{Erde}}{r} = \frac{1}{2} \left| E_{pot} \right|$.

Physik für Informatiker   Frühjahr 2001   Lösungen

2.)

b) Entweder:

Translation des Schwerpunkts und Rotation um Achse durch den Schwerpunkt

Oder:

Rotation um momentane Drehachse

$$E_{pot,oben} = E_{kin,unten}$$

$$mgh = \frac{m}{2}v^2 + \frac{J_s}{2}\omega^2 \qquad\qquad mgh = \frac{J_M}{2}\omega^2$$

wobei $v = \omega R$, so daß

$$v = \left(\frac{2gh}{1+\frac{J_s}{mR^2}}\right)^{1/2} \qquad\qquad v = \left(\frac{2mghR^2}{J_M}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(mit Steinerschem Satz: $J_M = J_S + mR^2$)

$$v = \left(\frac{2gh}{1+\frac{J_s}{mR^2}}\right)^{1/2}$$

a) $J_{s,\,Hohlwalze} = mR^2 \Rightarrow v_{Hohlwalze} = (gh)^{1/2}$

$$J_{s,\,Vollwalze} = \int r^2\,dm = \int_{r=0}^{R} r^2\, 2\pi r\,dr \cdot l \cdot \rho$$

$$= 2\pi l \rho \int_{r=0}^{R} r^3\,dr = 2\pi l\rho\frac{R^4}{4} = \frac{1}{2}mR^2$$

$$\Rightarrow v_{Vollwalze} = \left(\frac{4}{3}gh\right)^{1/2}$$

c) v_{Hohl} und v_{voll} hängen nur von g und h ab, so daß sie von m, l, R unabhängig sind

d) Aus $\frac{m}{2}v_{gleit}^2 = mgh$ folgt $v_{gleit} = (2gh)^{1/2}$

(r...   T...)

Physik für Informatiker Frühjahr 2001 Lösungen

3) a) $$\phi(R_1) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_1}$$

$$\phi(R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_2}$$

$$U = \phi(R_1) - \phi(R_2) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right]$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2}$$

b) Die Kapazität C ist dann

$$C = \frac{Q}{U} = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1}$$

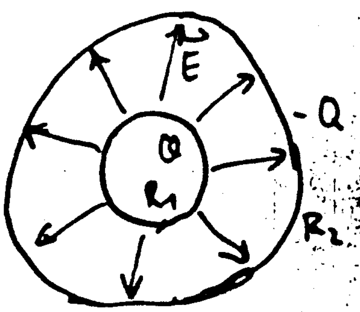
d) Für $R_2 = R_1 + d$ und $d \ll R_1$ gilt:

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{R_1(R_1+d)}{d} = \frac{4\pi\varepsilon_0 R_1^2}{d} \left(1 + \frac{d}{R_1}\right)$$

$$\approx 4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{R_1^2}{d} = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d}$$

$$= C_{\text{Plattenkondensator}}$$

c)



radiale Feldlinien zwischen R_1 und R_2

kein Feld innerhalb R_1 oder außerhalb R_2

Physik für Informatiker Frühjahr 2001 Lösungen

4.

a)
$$U_C = Q/C$$
$$U_L = -L \cdot \dot{I}$$

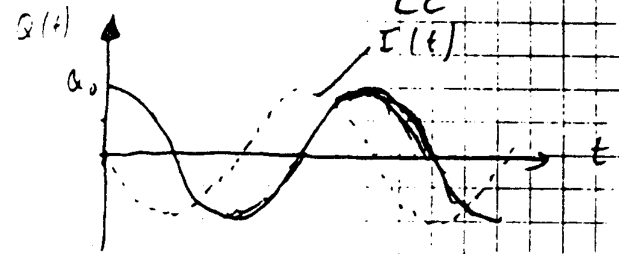
Mit $I = \dot{Q}$ gilt: $U_C + U_L = 0$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{C} Q - L \cdot \ddot{Q} = 0$$
$$\ddot{Q} - \frac{1}{LC} Q = 0$$

b)
$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega t)$$
$$\dot{Q}(t) = -Q_0 \omega \sin(\omega t)$$
$$\ddot{Q}(t) = -Q_0 \omega^2 \cos(\omega t)$$

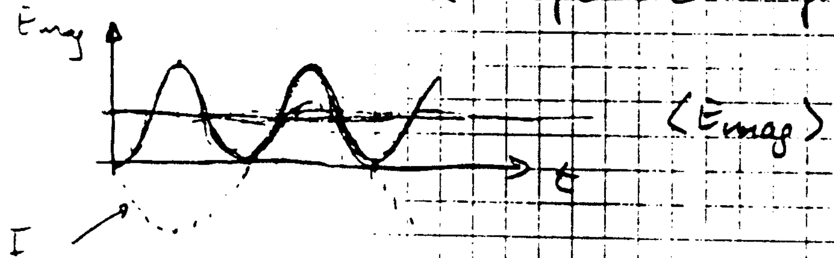
einsetzen: $-Q_0 \left[\omega^2 - \frac{1}{LC} \right] \cos(\omega t) = 0 \quad \forall t$

$$\Rightarrow \quad \omega^2 = \frac{1}{LC} \qquad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$



c)
$$\left[E_{mag} = \frac{1}{2} L I^2 \right.$$
$$E_{mag}(t) = \frac{1}{2} L I(t)^2$$
$$= \frac{1}{2} L Q_0^2 \omega^2 \sin^2(\omega t)$$
$$\left. = \frac{1}{2} L Q_0^2 \omega^2 \left(1 - \cos(2\omega t)\right) \right]$$

Die magnetische Energie schwingt mit $2\omega = \frac{2}{\sqrt{LC}}$ um die mittlere magnetische Energie



Physik für Informatiker Frühjahr 2001 Lösungen

5. a) 1 mol hat die Masse 4g
1 mol enthält $N_A = 6 \cdot 10^{23}$ Atome.
$\Rightarrow$ 1 Atom hat die Masse

$$m_{He} = \frac{4g}{6 \cdot 10^{23}} = 6{,}6 \cdot 10^{-24}\,g = 6{,}6 \cdot 10^{-27}\,kg$$

b) thermische (Translations-) Bewegungsenergie

$$\overline{E}_{kin} = \frac{3}{2} k_B T$$

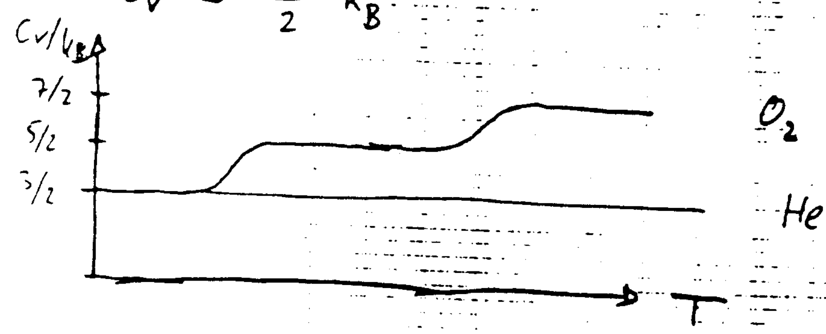
T = Temperatur in K $= 273 + 25\ K = 298\ K$

$$\overline{E}_{kin} = \frac{1}{2} m \overline{v_r}^2$$

$$v_m = \sqrt{\overline{v^2}} = \sqrt{\frac{2\,\overline{E}_{kin}}{m}}$$

$$v_m = \sqrt{\frac{3\,k_B T}{m}} = 1367\ \frac{m}{s}$$

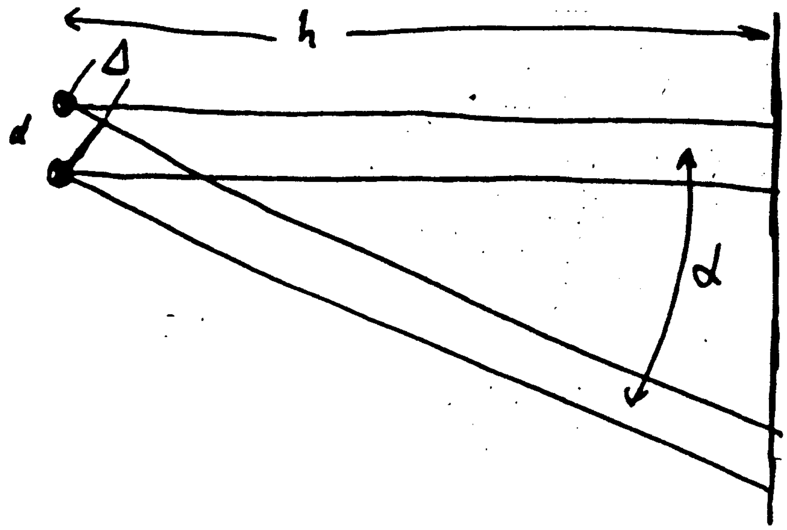
c) He: $c_V = \frac{3}{2} k_B$



O_2 ist ein 2-atomiges Molekül. Hier können noch 2 Rotationsfreiheitsgrade und später zwei Schwingungsfreiheitsgrade angeregt werden. Atomares Helium kann nur Translationen ausführen.

Physik für Informatiker Frühjahr 2001 Lösungen

6.



a)

Maxima durch konstruktive Interferenz treten auf für $\Delta = n \cdot \lambda$ mit $n \in \mathbb{N}_0$.

Für kleine Winkel α gilt:

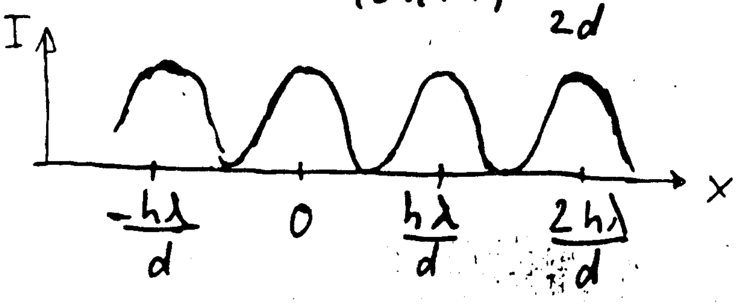
$$\sin\alpha = m \cdot \frac{\lambda}{d} \approx \alpha \quad , \quad m \in \mathbb{Z}$$

Minima treten für destruktive Interferenz auf:

$$\Delta = (2n+1) \cdot \lambda/2$$

$$\Rightarrow \alpha = (2n+1) \cdot \frac{\lambda}{2d}$$

b)



$$x = h \cdot \sin\alpha \approx h \cdot \alpha$$

äquidistante Maxima

Intensität $\propto \cos^2$

c)

$$\frac{\lambda}{d} = \alpha = \frac{a}{h} \Rightarrow \lambda = \frac{da}{h}$$

Mit $\nu \cdot \lambda = v_s$ folgt

$$\nu = \frac{v_s h}{dx} = 6800 \text{ Hz}$$

d) Phasenverschiebung von 180° entspricht Verschiebung von $\lambda/2$ $\Rightarrow$ Ma...

Physik für Informatiker Frühjahr 2001 Lösungen

7.

c) $^{14}_{6}C \rightarrow {}^{14}_{7}N, e^- \bar{\nu}$

$^{14}_{7}N$ hat 7 Protonen und 7 Neutronen

a) $N_{14}(t) = N_{14}^0 \cdot e^{-t/\tau}$ = Zahl der momentan vorhandenen ^{14}C-Kerne

$t = T_{1/2}$: $\frac{N_{14}^0}{2} = N_{14}^0 \, e^{-T_{1/2}/\tau}$

$\Rightarrow \ln \frac{1}{2} = -\frac{T_{1/2}}{\tau} \Rightarrow \tau = \frac{T_{1/2}}{\ln 2}$

$= 8267$ Jahre

$= 2{,}607 \cdot 10^{11}$ s

$t = 22920$ Jahre: $\frac{N_{14}(t)}{N_{14}^0} = e^{-\frac{22920}{8267}}$

$= 0.0625$

b) Zerfallsrate:

$$\frac{dN_{14}}{dt}(t_1) = -\frac{N_{14}(t_1)}{\tau}$$

mit $N_{14}(t_1) = N_{14}^0 \cdot e^{-t_1/\tau}$

$N_{14}^0 = x \cdot N_{12}$ mit $x = 1.3 \cdot 10^{-12}$

$= x \, (N - N_{14}(t_1))$

$\approx x N$, N = Gesamtzahl der C-Atome

240 Gramm $\hat{=}$ 20 mol $= 20 \cdot N_A$ Atome

$N = 120 \cdot 10^{23}$

Physik für Informatiker Frühjahr 2001 Lösungen

7. Forts.

$$\frac{dN_{14}}{dt}(t_1) = -A(t_1) = -\frac{xN}{\tau} e^{-t_1/\tau}$$

$$\ln\left(\frac{A\tau}{xN}\right) = -t_1/\tau$$

$$t_1 = -\tau \ln \frac{A\tau}{xN}$$

$$= -8267 \text{ Jahre} \cdot \ln \frac{1{,}5 \cdot 2{,}607 \cdot 10^{11}}{13 \cdot 10^{-12} \cdot 120 \cdot 10^{23}}$$

$$\simeq -8267 \text{ Jahre} \cdot \ln 0{,}025$$

$$\approx 30000 \text{ Jahre}$$

Physik für Informatiker Frühjahr 2001 Lösungen

8. a) $m = m_0 \cdot \gamma$ mit $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \frac{1}{\sqrt{1-0{,}98^2}} = \underline{\underline{5{,}02}}$

b) Zeitdilatation

vergangene Zeit: $\Delta t_{ruhend} = \gamma \cdot \Delta t_{bewegt}$
$= 5{,}025$ Jahre

c) Längenkontraktion in Richtung der Bewegung von einem ruhenden Beobachter gesehen:

$$l_{\substack{\text{ruhende}\\\text{Beobachter}}} = \frac{l_0}{\gamma} = \frac{l_0}{5{,}025}$$

Die Längen senkrecht zur Bewegungsrichtung bleiben unverändert

d) $$\rho = \frac{m}{V} = \frac{m}{a \cdot b \cdot c} = \frac{\gamma m_0}{\frac{a}{\gamma} \cdot b \cdot c} = \gamma^2 \cdot \frac{m}{a \cdot b \cdot c}$$

$$\rho = \gamma^2 \rho_0 = 25{,}25\, \rho_0$$

(wobei a = Länge in Bewegungsrichtung)

Physik für Informatiker Frühjahr 2001 Lösungen

9 a) $\hat{E}\psi(\vec{x},t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi_0 e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}$

$= i\hbar \psi_0 e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)} (-i\omega)$

$= \hbar\omega \underbrace{\psi_0 e^{i(\vec{k}\vec{x}-\omega t)}}$

$= \underbrace{\hbar\omega} \psi(\vec{x},t)$

$= E \psi(\vec{x},t)$

$\Rightarrow \psi$ ist Eigenfunktion zum Operator $\hat{E}$ mit Eigenwert $E = \hbar\omega$

b) $\hat{p} = -i\hbar\vec{\nabla}$ $\hat{\vec{r}} = \vec{r}$ $\hat{E}_{kin} = \frac{\hat{p}^2}{2m} = -\frac{\hbar^2}{2m}$

c) $E_{kin} + E_{pot} = E_{ges}$

$E_{kin}\psi + E_{pot}\psi = E_{ges}\psi$

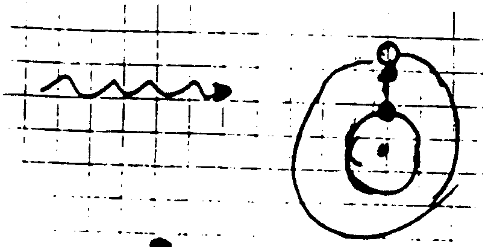
$\hat{E}_{kin}\psi + \hat{E}_{pot}\psi = \hat{E}\psi$

$-\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\psi + E_{pot}\psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi$

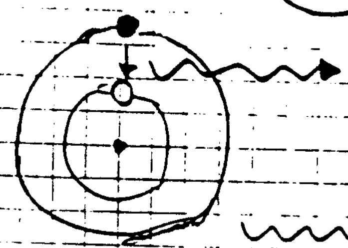
d) ψ ist eine nicht direkt physikalisch interpretierbare komplexe Größe, deren Absolutquadrat $|\psi|^2 = \psi^*\psi$ die Aufenthaltswahrscheinlichkeit angibt.

Physik für Informatiker Frühjahr 2001 Lösungen

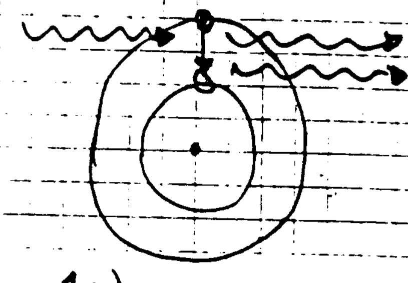
10.) a) Absorption



spontane Emission



stimulierte Emission

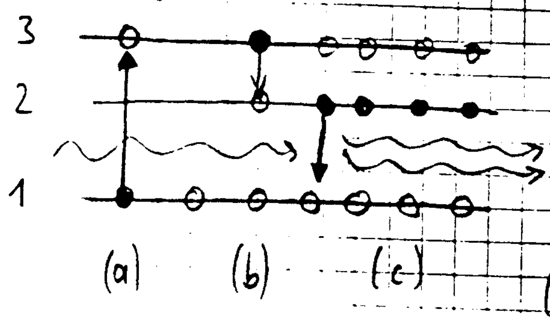


b) $E_\gamma = E_2 - E_1 = -R_H \cdot \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{1^2}\right) = 10{,}2 \text{ eV}$

$E_\gamma = 10.2 \text{ V} \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} \text{ C} = 1{,}632 \cdot 10^{-18} \text{ J}$

$E_\gamma = h \cdot \nu \Rightarrow \nu = 2{,}46 \cdot 10^{15} \text{ s}^{-1}$

c)



(a) „Pumpen" vom Grundzustand 1 in Zustand 3

(b) schneller spontaner Zerfall von 3 auf langlebigen Zustand 2

→ Besetzungsinversion

(c) stimulierte Emission von Zustand 2 in Grundzustand durch Photonen der richtigigen Wellenlänge → Verstärkung des kohärenten Lichts