UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)
Institut für Praktische Mathematik
Prof. Dr. Rudolf Scherer, Dipl.-Math. Heike Stoll

Klausur

Numerische Mathematik für die Fachrichtung Informatik und für Ingenieurwesen

22. Februar 2006, 9:00 – 11:00 Uhr

Name:

Vorname:

Matrikel-Nr. :

	1			2			3			4			5		6		Σ
Aufgabe	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	a	b	
max. Pkte.	2	2	1	3	1	2	2	3	2	2	2	3	2	2	2	3	34
err. Pkte.																	

Hinweise:

1. Zugelassen zur Klausur sind alle Studierenden, die im Übungsbetrieb des Sommersemesters 2005 **mindestens 20 Punkte** erreicht haben.
2. Hilfsmittel wie Skripten, Vorlesungsmitschriften, Bücher, Taschenrechner, etc. sind **nicht** erlaubt.
3. Verwenden Sie bitte für jede Aufgabe ein **neues Blatt**, und versehen Sie es mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**.
4. Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis bereit.
5. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
6. Zum Bestehen der Klausur sind **14** Punkte hinreichend.

Aufgabe 1: Gegeben sei die Funktion $f(x) = -1 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{12}x^3$.

(a) Zeigen Sie, dass $f(x)$ im Intervall $[-1, 0]$ genau einen Fixpunkt x^* besitzt und dass die Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ für jeden Startwert $x_0 \in [-1, 0]$ gegen x^* konvergiert.

(b) Wieviel Iterationsschritte des Verfahrens $x_{n+1} = f(x_n)$ müssen, ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$, mindestens durchgeführt werden, um $|x_n - x^*| < 10^{-5}$ garantieren zu können? Hinweis: $\log_{10}(2) < 0.4$.

(c) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle von f und berechnen Sie eine Iterierte ausgehend vom Startwert $x_0 = -1$.

Aufgabe 2: Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 11 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix A.

(b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Cholesky-Zerlegung das lineare Gleichungssystem.

(c) Zu den Messwerten

x_i	0	1	2	3	4
y_i	8	5	1	1	0

soll eine Gerade $y(x) = \alpha + \beta x$ so bestimmt werden, dass $\sum |y(x_i) - y_i|^2$ minimal wird. Bestimmen Sie die optimalen Parameter α und β und berechnen Sie dieses Minimum.

Aufgabe 3: Gegeben sei das Polynom $p(x) = 4x^3 - 6x + 3$.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin einen Kreis um 0, in dem alle Nullstellen von $p(x)$ liegen.

(b) Verwenden Sie den Satz von Sturm, um die Anzahl der Nullstellen von $p(x)$ in den Intervallen $[-2, -1]$, $[-1, 0]$ und $[0, 1]$ zu bestimmen.

(c) Entwickeln Sie $p(x)$ nach Potenzen von $(x + 2)$ mit Hilfe des vollständigen Hornerschemas und geben Sie $p^{(3)}(-2)$ an.

Aufgabe 4:

(a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^2$. Berechnen Sie das Interpolationspolynom p_3 zu f bezüglich $x_0 = -\frac{3}{2}, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = \frac{3}{2}$ in Newton-Gestalt.

Hinweis: $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Zeigen Sie die Fehlerabschätzung zur Funktion f aus (a)

$$\max_{x \in \left[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{48}\pi^4.$$

Hinweise: $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$.

(c) Geben Sie die Definition eines kubischen Splines an. Welche Arten von Randvorgaben können sinnvoll vorgegeben werden? Gegeben sei die Funktion $g(x) = \frac{32}{3+x}$ und die Knoten $x_0 = -1, x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Zeigen Sie, dass die Funktion s definiert durch

$$s(x) := \begin{cases} \frac{32}{3} - \frac{7}{2}x + x^2 - \frac{5}{6}x^3, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{32}{3} - \frac{7}{2}x + x^2 - \frac{1}{6}x^3, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

der zugehörige interpolierende kubische Spline ist, der den Randvorgaben $s'(x_0) = g'(x_0)$ und $s'(x_2) = g'(x_2)$ genügt.

Aufgabe 5: Gegeben sei das Integral

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{15}{1+x^2} dx.$$

$T_{0,k}$ bezeichnet die zusammengesetzte Trapezregel zur Schrittweite $\frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$.

(a) Bestimmen Sie N so, dass $|I - T_{0,k}| < 10^{-4}$ für $k \geq N$ garantiert werden kann.

Hinweise: $\log_{10} 2 < 0.4$, $\log_{10} 5 > 0.6$.

(b) Berechnen Sie $T_{0,0}, T_{0,1}, T_{0,2}$. Verbessern Sie die Näherung durch Berechnung der ersten drei Zeilen des Romberg-Schemas.

Aufgabe 6:

(a) Bestimmen Sie die Fourierreihe zu der 2π-periodischen Funktion f, welche auf $[0, 2\pi)$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} x - \pi & 0 \leq x < \pi \\ 0 & \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

(b) Gegeben sei das Polynom $p(x) = 1 - 6x + 4x^3$. Bestimmen Sie die Bezier-Darstellung für $p(x)$. Berechnen Sie $p\left(\frac{1}{2}\right)$ mit dem Algorithmus von de Casteljau. Skizzieren Sie den Graph des Polynoms sowie das Bezier-Polygon für $x \in [0, 1]$ in einem Schaubild.

Lösung zur Nachklausur vom 22. Februar 2006

Aufgabe 1: Gegeben sei die Funktion $f(x) = -1 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{12}x^3$.

(a) Zeigen Sie, dass $f(x)$ im Intervall $[-1, 0]$ genau einen Fixpunkt x^* besitzt und dass die Fixpunktiteration $x_{n+1} = f(x_n)$ für jeden Startwert $x_0 \in [-1, 0]$ gegen x^* konvergiert.

(b) Wieviel Iterationsschritte des Verfahrens $x_{n+1} = f(x_n)$ müssen ausgehende vom Startwert $x_0 = 0$ mindestens durchgeführt werden, um $|x_n - x^*| < 10^{-5}$ garantieren zu können? Hinweis: $\log_{10}(2) < 0.4$.

(c) Formulieren Sie das Newton-Verfahren zur Berechnung einer Nullstelle von f und berechnen Sie eine Iterierte ausgehend vom Startwert $x_0 = -1$.

Lösung:

(a) Zu zeigen: Voraussetzunge des BFPS $\boxed{1/2}$

(1) $I = [-1, 0]$ abgeschlossen

(2) f Abb. in sich: $f(I) \subseteq I$: Bestimme Maxima/Minima von f:

$$f'(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 = \frac{1}{4}x\,[1 - x] \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = 1 \notin I$$

Untersuchung der Randwerte:

$$f(-1) = -1 + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} = \frac{-24 + 3 + 2}{24} = -\frac{19}{24} \in I,\ f(0) = -1 \in I$$

$$\Rightarrow \quad -1 = f(0) \leq f(x) \leq f(-1) = -\frac{19}{24} \leq 0 \Rightarrow f(I) \subseteq I \qquad \boxed{1/2}$$

(3) f Kontraktion, d.h. $|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$, $L \in (0, 1)$: Da f diffbar, gilt

$$L = \max_{x \in [-1,0]} |f'(x)| = \max_{x \in [-1,0]} \left| \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2 \right| = \frac{1}{4} \max_{x \in [-1,0]} |x - x^2|$$

$x - x^2 = -(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{1}{4}$ ist eine nach unten offene Parabel mit Scheitelpunkt $(1/2, 1/4)$,

$$\Rightarrow \max_{x \in [-1,0]} |f'(x)| = |f'(-1)| = \frac{1}{4}| - 1 - (-1)^2| = \frac{1}{4}| - 2| = \frac{1}{2} = L \qquad \boxed{1}$$

$\Rightarrow$ Bed. des BFPS sind erfüllt, $x_{n+1} = f(x_n)$ konv. für jeden Startwert $x_0 \in I$ gegen Fixpunkt $x^* \in [-1, 0]$.

(b) Für die Anzahl der Iterationsschritte sollte gelten (a-priori Schranke): $|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L}|x_1 - x_0|$: $\boxed{1/2}$.

$$\Rightarrow |x_n - x^*| \leq \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}}|f(x_0) - x_0| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} | - 1 - 0| = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \stackrel{!}{<} 10^{-5} \qquad \boxed{1/2}$$

$$\Rightarrow 10^5 < 2^{n-1} \Rightarrow \log_{10} 10^5 < \log_{10} 2^{n-1} \Rightarrow 5 < (n-1)\log_{10} 2 < (n-1)\frac{4}{10}$$

$$\Rightarrow 5 < \frac{2}{5}n - \frac{2}{5} \Rightarrow n > \frac{25}{2} + 1 = \frac{27}{2} \qquad \boxed{1/2}$$

Es müssen mindestens $n = 14 > \frac{27}{2}$ Iterationsschritte durchgeführt werden um $|x_n - x^*| < 10^{-5}$ garantieren zu können. $\boxed{1/2}$

(c) Die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren zur Bestimmung der Nullstelle von $f(x)$ lautet

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots$$

In unserem Fall ist

$$f(x) = -1 + \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{12}x^3 \text{ und } f'(x) = \frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^2$$

und damit folgt

$$x_{n+1} = x_n - \frac{-1 + \frac{1}{8}x_n^2 - \frac{1}{12}x_n^3}{\frac{1}{4}x_n - \frac{1}{4}x_n^2} \qquad \boxed{1/2}$$

Damit erhalten wir

$$x_0 = -1,\ x_1 = -1 - \frac{f(-1)}{f'(-1)} = -1 - \frac{-\frac{19}{24}}{-\frac{1}{2}} = -1 - \frac{19}{12} = -\frac{31}{12} \qquad \boxed{1/2}$$

Aufgabe 2: Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 11 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} -3 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Cholesky-Zerlegung der Matrix A.

(b) Lösen Sie mit Hilfe dieser Cholesky-Zerlegung das lineare Gleichungssystem.

(c) Zu den Messwerten

x_i	0	1	2	3	4
y_i	8	5	1	1	0

soll eine Gerade $y(x) = \alpha + \beta x$ so bestimmt werden, dass $\sum |y(x_i) - y_i|^2$ minimal wird. Bestimmen Sie die optimalen Parameter α und β und berechnen Sie dieses Minimum.

Lösung:

(a) 2 Alternativen zur Durchführung der Cholesky-Zerlegung:

1. Alternative: Ablesen der Koeffizienten von L aus Matrixdarstellung

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 8 & 4 & 2 \\ 0 & 4 & 5 & -1 \\ 1 & 2 & -1 & 11 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Alternative Cholesyk-Algorithmus

$$\begin{aligned}
& l_{11} = \sqrt{a_{11}} = \sqrt{1} = 1 \\
\text{2. Zeile: } & l_{21} = \frac{a_{21}}{l_{11}} = \frac{2}{1} = 2 \\
& l_{22} = \sqrt{a_{22} - |l_{21}|^2} = \sqrt{8 - |2|^2} = 2 \\
\text{3. Zeile: } & l_{31} = \frac{a_{31}}{l_{11}} = \frac{0}{1} = 0 \\
& l_{32} = \frac{1}{l_{22}}(a_{32} - l_{31}l_{21}) = \frac{1}{2}(4 - 0 \cdot 2) = 2 \\
& l_{33} = \sqrt{a_{33} - |l_{31}|^2 - |l_{32}|^2} = \sqrt{5 - |0|^2 - |2|^2} = 1 \\
\text{4. Zeile: } & l_{41} = \frac{a_{41}}{l_{11}} = \frac{1}{1} = 1 \\
& l_{42} = \frac{1}{l_{22}}(a_{42} - l_{41}l_{21}) = \frac{1}{2}(2 - 1 \cdot 2) = 0 \\
& l_{43} = \frac{1}{l_{33}}(a_{43} - l_{41}l_{31} - l_{42}l_{32}) = \frac{1}{1}(-1 - 1 \cdot 0 - 0 \cdot 2) = -1 \\
& l_{44} = \sqrt{a_{44} - |l_{41}|^2 - |l_{42}|^2 - |l_{43}|^2} = \sqrt{11 - |1|^2 - |0|^2 - |-1|^2} = 3
\end{aligned}$$

$\boxed{3}$

(b)

$$Ax = b \;\Rightarrow\; LL^\top x = b \;\text{ mit }\; L^\top x =: y$$

$$Ly = b \qquad \left.\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ 2 & 2 & & \\ 0 & 2 & 1 & \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{array}\right| \begin{array}{c} -3 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} y_1 & = & -3 \\ y_2 & = & (-2+6)/2 = 2 \\ y_3 & = & (4 - 2 \cdot 2) = 0 \\ y_4 & = & (6+3+0)/3 = 3 \end{array}$$

$$L^\top x = y \qquad \left.\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 1 \\ & 2 & 2 & 0 \\ & & 1 & -1 \\ & & & 3 \end{array}\right| \begin{array}{c} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 3 \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} x_1 & = & -3 - 1 = -4 \\ x_2 & = & 0 \\ x_3 & = & 1 \\ x_4 & = & 1 \end{array}$$

$\boxed{1/2}$ Ansatz, $\boxed{1/2}$ Rechnung

(c) $x = (0,1,2,3,4)^\top,\ y = (8,5,1,1,0)^\top$ mit $y(x_i) = \alpha + \beta x_i \Leftrightarrow$ LGS $A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = y$ mit

$$\Psi(a,b) = \sum_{i=0}^{4} |y_i(x_i) - y_i|^2 = \min_{\alpha,\beta} \left\| y - A \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \min_{\alpha,\beta} \left\| r \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

Das Minimum des Residuums ist gegeben durch die Lösung der Normalgleichung $A^\top A x = A^\top y$. $\boxed{1/2}$

$$A^\top A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 30 \end{pmatrix} \text{ und}$$

$$A^\top y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

$$A^\top A | A^\top y = \begin{array}{cc|c} 5 & 10 & 15 \\ 10 & 30 & 10 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 5 & 10 & 15 \\ 0 & 10 & -20 \end{array} \rightarrow \begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \beta = -2,\ \alpha = 7 \Rightarrow\ y(x) = \alpha + \beta x = 7 - 2x \qquad \boxed{1/2}$$

Wert des Minimums:

$$\boxed{1/2}\ \Psi(\alpha,\beta) = \left\| r \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \end{pmatrix} \right\|_2^2 = \left\| \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 7 \\ 5 \\ 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\|_2^2$$

$$= (8-7)^2 + (5-5)^2 + (1-3)^2 + (1-1)^2 + (0+1)^2 = 1 + 4 + 1 = 6$$

$$\Rightarrow \text{Wert des Minimums } \sqrt{\Psi(7,-2)} = \sqrt{6} \qquad \boxed{1/2}$$

Aufgabe 3: Gegeben sei das Polynom $p(x) = 4x^3 - 6x + 3$.

(a) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin einen Kreis um 0, in dem alle Nullstellen von $p(x)$ liegen.

(b) Verwenden Sie den Satz von Sturm, um die Anzahl der Nullstellen von $p(x)$ in den Intervallen $[-2,-1]$, $[-1,0]$ und $[0,1]$ zu bestimmen.

(c) Entwickeln Sie $p(x)$ nach Potenzen von $(x+2)$ mit Hilfe des vollständigen Hornerschemas und geben Sie $p^{(3)}(-2)$ an.

Lösung:

(a) Gerschgorin: Nullstellen $x_1, \dots, x_n$ von $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0$ liegen im Kreis $\mathcal{K}(0, r)$ mit

$$r \le \max\left\{1, \sum_{j=0}^{n-1} |a_j|\right\} \text{ und } r \le \max\left\{|a_0|, 1+|a_1|, \dots, 1+|a_{n-1}|\right\}$$

$\Rightarrow$ Normiere Polynom p: $\frac{p(x)}{4} = x^3 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}$ $\boxed{1/2}$

$$r \le \max\left\{1, \left|\frac{3}{4}\right| + \left|-\frac{3}{2}\right|\right\} = \frac{9}{4} \;\boxed{1/2}\; \text{ und } r \le \max\left\{\left|\frac{3}{4}\right|, 1 + \left|-\frac{3}{2}\right|, 1+|0|\right\} = \frac{5}{2} \;\boxed{1/2}$$

Alle Nullstellen von $p(x)$ liegen in $\mathcal{K}\left(0, \frac{9}{4}\right)$. $\boxed{1/2}$

(b) $p(x) = 4x^3 - 6x + 3 =: p_0(x)$ und $p'(x) = 12x^2 - 6 \Rightarrow p_1(x) := 2x^2 - 1$ $\boxed{1/2}$
Bilde Sturmsche Kette mit Hilfe des Euklidischen Algorithmus:

$$\begin{aligned}
&\underline{p_0(x) : p_1(x):}\quad (4x^3 - 6x + 3) : (2x^2 - 1) = 2x \\
&\quad \underline{-(4x^3 - 2x)} \\
&\quad\quad -4x + 3 \Rightarrow p_2(x) := 4x - 3 \quad \boxed{1/2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\underline{p_1(x) : p_2(x):}\quad (2x^2 \quad\quad - 1) : (4x - 3) = \frac{1}{2}x + \frac{3}{8} \\
&\quad \underline{-\left(2x^2 - \frac{3}{2}x\right)} \\
&\quad\quad \frac{3}{2}x - 1 \\
&\quad\quad \underline{-\left(\frac{3}{2}x - \frac{9}{8}\right)} \\
&\quad\quad\quad \frac{1}{8} \Rightarrow p_3(x) := -\frac{1}{8} \quad \boxed{1/2}
\end{aligned}$$

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	VZW
-2	$-$	$+$	$-$	$-$	2
-1	$+$	$+$	$-$	$-$	1
0	$+$	$-$	$-$	$-$	1
1	$+$	$+$	$+$	$-$	1

$\boxed{1/2}$

$\Rightarrow$ Keine Nullstellen in $[-1,0]$ und $[0,1]$ $\boxed{1/2}$ und eine Nullstelle in $[-2,-1]$ $\boxed{1/2}$.

(c)

$$
\begin{array}{r|rrrr}
 & 4 & 0 & -6 & 3 \\
x=-2 & - & -8 & 16 & -20 \\
\hline
 & 4 & -8 & 10 & \boxed{-17 = p(-2)} \\
x=-2 & - & -8 & 32 & \\
\hline
 & 4 & -16 & \boxed{42 = p'(-2)} & \\
x=2 & - & -8 & & \\
\hline
 & 4 & -24 = \frac{p''(-2)}{2!} & \Rightarrow \boxed{p''(-2) = -48} & \\
 & = \frac{p^{(3)}(-2)}{3!} & \Rightarrow \boxed{p^{(3)}(-2) = 24} \ \boxed{1/2} & &
\end{array}
\qquad \boxed{1}
$$

$$p(x) = \sum_{k=0}^{3} \frac{p^{(k)}(-2)}{k!}(x+2)^k = -17 + 42(x+2) - 24(x+2)^2 + 4(x+2)^3 \qquad \boxed{1/2}$$

Aufgabe 4:

(a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right) - x^2$. Berechnen Sie das Interpolationspolynom p_3 zu f bezüglich $x_0 = -\frac{3}{2}, x_1 = -\frac{1}{2}, x_2 = \frac{1}{2}$ und $x_3 = \frac{3}{2}$ in Newton-Gestalt.

Hinweis: $\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(b) Zeigen Sie die Fehlerabschätzung zur Funktion f aus (a)

$$\max_{x\in[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{48}\pi^4.$$

Hinweise: $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$.

(c) Geben Sie die Definition eines kubischen Splines an. Mit welchen Arten von Randvorgaben ist der interpolierende kubische Spline eindeutig bestimmt? Gegeben sei die Funktion $g(x) = \frac{32}{3+x}$ und die Knoten $x_0 = -1, x_1 = 0$ und $x_2 = 1$. Zeigen Sie, dass die Funktion s definiert durch

$$s(x) := \begin{cases} \frac{32}{3} - \frac{7}{2}x + x^2 - \frac{5}{6}x^3, & -1 \leq x \leq 0 \\ \frac{32}{3} - \frac{7}{2}x + x^2 - \frac{1}{6}x^3, & 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

der zugehörige interpolierende kubische Spline ist, der den Randvorgaben $s'(x_0) = g'(x_0)$ und $s'(x_2) = g'(x_2)$ genügt.

Lösung:

(a) Berechnung der dividierten Differenzen für die Newton-Darstellung:

$$\begin{array}{c|lccc}
x & f(x) & & & \\
x_0 = -\frac{3}{2} & [x_0] = \sin^2\left(-\frac{3}{4}\pi\right) - \frac{9}{4} = -\frac{7}{4} = \alpha_0 & & & \\
 & & \frac{\frac{1}{4}+\frac{7}{4}}{-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = 2 = \alpha_1 & & \\
x_1 = -\frac{1}{2} & [x_1] = \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} & & \frac{0-2}{\frac{1}{2}+\frac{3}{2}} = -1 = \alpha_2 & \\
 & & \frac{\frac{1}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}} = 0 & & \frac{-1+1}{\frac{3}{2}+\frac{3}{2}} = 0 = \alpha_3 \\
x_2 = \frac{1}{2} & [x_2] = \sin^2\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} & & \frac{-2-0}{\frac{3}{2}+\frac{1}{2}} = -1 & \\
 & & \frac{-\frac{7}{4}-\frac{1}{4}}{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = -2 & & \\
x_3 = \frac{3}{2} & [x_3] = \sin^2(\frac{3}{4}\pi) - \frac{9}{4} = -\frac{7}{4} & & &
\end{array}$$

$\boxed{1}$

$$\begin{aligned}
p_3(x) &= \sum_{k=0}^{3} \alpha_k \omega_k(x) = -\frac{7}{4} \cdot 1 + 2 \cdot \omega_1(x) - 1 \cdot \omega_2(x) + 0 \cdot \omega_3(x) \\
&= -\frac{7}{4} + 2\left(x + \frac{3}{2}\right) - 1\left(x + \frac{3}{2}\right)\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(= -x^2 + \frac{1}{2}\right) \qquad \boxed{1}
\end{aligned}$$

(b) Nach der Restgliedformel von Cauchy: $f(x) - p_n(x) = \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)\,\omega(x),\ \xi \in [a,b]$ folgt für $n = 3$:

$$\max_{x\in[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \max_{x\in[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]} |f^{(4)}(x)| \max_{x\in[-\frac{3}{2},\frac{2}{3}]} |\omega(x)| \qquad \boxed{1/2}$$

Bestimmung des Maximums von $f^{(4)}(x)$:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= 2\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\frac{\pi}{2} - 2 \\
f''(x) &= 2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\frac{\pi^2}{4} - 2\sin^2\left(\frac{\pi}{2}x\right)\frac{\pi^2}{4} - 2 = \frac{\pi^2}{2}\cos(\pi x) - 2 \\
f^{(3)}(x) &= -\frac{1}{2}\pi^3\sin(\pi x)
\end{aligned}$$

$$f^{(4)}(x) = -\frac{1}{2}\pi^4 \cos(\pi x)$$

$$\Rightarrow \max_{x\in[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]} |f^{(4)}(x)| = \frac{1}{2}\pi^4 \qquad \boxed{1/2}$$

Bestimmung des Maximums von $\omega(x)$:

$$\omega(x) = \left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{3}{2}\right) = \left(x^2-\frac{9}{4}\right)\left(x^2-\frac{1}{4}\right) = x^4 - \frac{5}{2}x^2 + \frac{9}{16}$$

Bestimme Ableitung von $\omega(x)$ und setze diese Null, um Maxima/Minima zu finden:

$$\omega'(x) = 4x^3 - 5x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } 4x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\frac{\sqrt{5}}{2} \text{ mit } \omega(0) = \frac{9}{16}, \omega\left(\pm\frac{\sqrt{5}}{2}\right) = -1$$

Für die Randwerte gilt:

$$\omega\left(-\frac{3}{2}\right) = \omega\left(\frac{3}{2}\right) = 0 \quad \Rightarrow \max_{x\in[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]} |\omega(x)| = \left|\omega\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)\right| = 1 \qquad \boxed{1/2}$$

Damit folgt insgesamt:

$$\max_{x\in[-\frac{3}{2},\frac{3}{2}]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \cdot \frac{1}{2}\pi^4 \cdot 1 = \frac{1}{48}\pi^4 \qquad \boxed{1/2}$$

(c) Definition: $s : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt kubischer Spline bezüglich des Gitters $\triangle = \{a = x_0, \ldots, x_n = b\}$, falls gilt

$$\begin{array}{ll} (1) & s|_{[x_{j-1},x_j]} \in \mathcal{P}_3, \quad j = 1,\ldots,n \\ (2) & s \in C^2([x_0,x_n]) \end{array} \qquad \boxed{1/2}$$

Die gesuchten Randvorgaben sind:

$$s'(x_0) = y_0^I,\ s'(x_n) = y_n^I \text{ und } s''(x_0) = s''(x_n) = 0 \qquad \boxed{1/2}$$

Mit $g(x) = \frac{32}{3+x}$, $g'(x) = -32(3+x)^{-2}$ erhalten wir

$$s(x) = \begin{cases} s_1(x) & := \frac{32}{3} - \frac{7}{2}x + x^2 - \frac{5}{6}x^3 \\ s_2(x) & := \frac{32}{3} - \frac{7}{2}x + x^2 - \frac{1}{6}x^3 \end{cases}$$

Die Ableitungen von s_1 und s_2 ergeben sich zu

$$s_1'(x) = -\frac{7}{2} + 2x - \frac{5}{2}x^2;\ s_1''(x) = 2 - 5x,\ s_2'(x) = -\frac{7}{2} + 2x - \frac{1}{2}x^2;\ s_2''(x) = 2 - x$$

Es müssen folgende Bedingungen nachgeprüft werden:

(a) Eigenschaften des kubischen Splines
(b) Interpolationsbedingung $\boxed{1/2}$
(c) Randvorgaben

(a)

$$s_1(0) = \frac{32}{3} = s_2(0) \checkmark; \quad s_1'(0) = -\frac{7}{2} = s_2'(0) \checkmark; \quad s_1''(0) = 2 = s_2''(0) \checkmark \qquad \boxed{1/2}$$

(b)

$$\begin{aligned} s(-1) &= \frac{32}{3} + \frac{7}{2} + 1 + \frac{5}{6} = \frac{64+21+6+5}{6} = \frac{96}{6} = 16 = g(-1) \checkmark \\ s(0) &= \frac{32}{3} = g(0) \checkmark \\ s(1) &= \frac{32}{3} - \frac{7}{2} + 1 - \frac{1}{6} = \frac{64-21+6-1}{6} = \frac{48}{6} = 8 = g(1) \checkmark \end{aligned} \qquad \boxed{1/2}$$

(c)

$$s'(-1) = -\frac{7}{2} - 2 - \frac{5}{2} = \frac{-7-4-5}{2} = -8 = g'(-1) \checkmark$$
$$s'(1) = -\frac{7}{2} + 2 - \frac{1}{2} = -2 = g'(1) \checkmark \qquad \boxed{1/2}$$

Aufgabe 5: Gegeben sei das Integral

$$I = \int_{-1}^{1} \frac{15}{1+x^2} dx.$$

$T_{0,k}$ bezeichnet die zusammengesetzte Trapezregel zur Schrittweite $\frac{2}{2^k} = \frac{1}{2^{k-1}}$.

(a) Bestimmen Sie N so, dass $|I - T_{0,k}| < 10^{-4}$ für $k \geq N$ garantiert werden kann.
Hinweise: $\log_{10} 2 < 0.4$, $\log_{10} 5 > 0.6$.

(b) Berechnen Sie $T_{0,0}, T_{0,1}, T_{0,2}$. Verbessern Sie die Näherung durch Berechnung der ersten drei Zeilen des Romberg-Schemas.

Lösung:

$$T_{0k} = h_k \left[\frac{1}{2} f(a) + \sum_{j=1}^{2^k-1} f(a + jh_k) + \frac{1}{2} f(b) \right], \; h_k = \frac{2}{2^k}, \; n = 2^k$$

(a) Der Fehler ergibt sich zu

$$|I - T_{0,k}| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \frac{1}{n^2} \max_{x\in[a,b]} |f''(x)| \qquad \boxed{1/2}$$

mit $n = 2^k, a = -1, b = 1$ und

$$f(x) = 15(1+x^2)^{-1}, \quad f'(x) = 15 \frac{-2x}{(1+x^2)^2},$$
$$f''(x) = 15 \frac{6x^2 - 2}{(1+x^2)^3}, \quad f'''(x) = 15 \frac{-24x(x^2-1)}{(1+x^2)^4}$$

Zur Bestimmung der Maxima/Minima von $f''(x)$ betrachte $f'''(x) = 0$:

$$f'''(x) = 15 \frac{-24x(x^2-1)}{(1+x^2)^4} \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x(x^2-1) = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ oder } x = \pm 1$$
$$\Rightarrow f''(0) = -30, \; f''(\pm 1) = \frac{15}{2} \Rightarrow \max_{x\in[-1,1]} |f''(x)| = 30 \qquad \boxed{1/2}$$

Damit folgt

$$|I - T_{0,k}| \leq \frac{(1+1)^3}{12} \frac{1}{2^{2k}} \max_{x\in[1,3]} |f''(x)| = \frac{2^3}{2^2 \cdot 3} \frac{1}{2^{2k}} \cdot 30 = \frac{5}{2^{2(k-1)}} \overset{!}{<} 10^{-4}$$

$$\frac{5}{2^{2(k-1)}} < 10^{-4} \Rightarrow 5 \cdot 10^4 < 2^{2(k-1)} \Rightarrow \log_{10}(5 \cdot 10^4) < \log_{10}(2^{2(k-1)})$$
$$\Rightarrow \log_{10} 5 + 4 \log_{10} 10 < 2(k-1) \log_{10} 2$$
$$\Rightarrow 4 < 2(k-1) \underbrace{\log_{10} 2}_{<0.4} - \underbrace{\log_{10} 5}_{>0.6} < 2(k-1)\frac{2}{5} - \frac{3}{5} = \frac{4}{5}k - \frac{7}{5}$$
$$\Rightarrow \frac{5}{4}\left(4 + \frac{7}{5}\right) = 5 + \frac{7}{4} = \frac{27}{4} < k \qquad \boxed{1/2}$$

Damit gilt für alle $k \geq 7 = N$ das Gewünschte. $\boxed{1/2}$

(b)

$$h_0 = 2 \quad T_{00} = 2\left[\frac{1}{2}f(-1) + \frac{1}{2}f(1)\right] = \frac{15}{2} + \frac{15}{2} = 15$$

$$h_1 = 1 \quad T_{01} = 1\left[\frac{1}{2}f(-1) + f(0) + \frac{1}{2}f(1)\right] = \frac{15}{4} + 15 + \frac{15}{4} = \frac{45}{2}$$

$$h_2 = \frac{1}{2} \quad T_{02} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}f(-1) + f\left(-\frac{1}{2}\right) + f(0) + f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f(1)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{15}{4} + 12 + 15 + 12 + \frac{15}{4}\right] = \frac{93}{4} \qquad \boxed{1}$$

$$T_{0,i} \qquad T_{1,i} = \frac{4T_{0,i+1} - T_{0,i}}{3} \qquad T_{2,i} = \frac{4^2 T_{1,i+1} - T_{1,i}}{4^2 - 1}$$

$$\begin{array}{lllll}
15 & \overset{-1/3}{\searrow} & & & \\
\frac{45}{2} & \xrightarrow{4/3} & T_{1,0} = -\frac{15}{3} + \frac{45}{2}\cdot\frac{4}{3} = 25 & \overset{-1/15}{\searrow} & \\
 & \overset{-1/3}{\searrow} & & & \\
\frac{93}{4} & \xrightarrow{4/3} & T_{1,1} = -\frac{45}{6} + \frac{93}{3} = \frac{47}{2} & \xrightarrow{16/15} & T_{2,0} = -\frac{1}{15}\cdot 25 + \frac{16}{15}\cdot\frac{47}{2} = \frac{376-25}{15} = \frac{117}{5} \qquad \boxed{1}
\end{array}$$

Aufgabe 6:

(a) Bestimmen Sie die Fourierreihe zu der 2π-periodischen Funktion f, welche auf $[0, 2\pi)$ gegeben ist durch

$$f(x) = \begin{cases} x - \pi & 0 \le x < \pi \\ 0 & \pi \le x < 2\pi. \end{cases}$$

(b) Gegeben sei das Polynom $p(x) = 1 - 6x + 4x^3$. Bestimmen Sie die Bezier-Darstellung für $p(x)$. Berechnen Sie $p\left(\frac{1}{2}\right)$ mit dem Algorithmus von de Casteljau. Skizzieren Sie den Graph des Polynoms sowie das Bezier-Polygon für $x \in [0, 1]$ in einem Schaubild.

Lösung:

(a)

$$\begin{aligned}
\hat{F}_k &\sim \frac{\hat{\alpha}_0}{2} + \sum_{l=1}^{k} \hat{\alpha}_l \cos lx + \hat{\beta}_l \sin lx \\
\hat{\alpha}_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{x^2}{2} - \pi x\right]_0^{\pi} = -\frac{\pi}{2} \qquad \boxed{1/2} \\
\hat{\alpha}_l &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos lx\, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}(x-\pi)\cos lx dx = \frac{1}{\pi}\left[(x-\pi)\frac{\sin lx}{l}\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin lx}{l}dx\right] \\
&= \frac{1}{\pi}\left[0 - 0 + \frac{1}{l^2}\cos lx|_0^{\pi}\right] = \frac{1}{\pi l^2}[(-1)^l - 1] \qquad \boxed{1/2} \\
\hat{\beta}_l &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin lx\, dx = \frac{1}{\pi}\left[(x-\pi)\ \frac{-\cos lx}{l}\Big|_0^{\pi} + \int_0^{\pi}\frac{\cos lx}{l}dx\right] = \frac{1}{\pi}\left[0 - \frac{\pi}{l}\right] = -\frac{1}{l} \qquad \boxed{1/2} \\
\hat{F}_k &\sim -\frac{\pi}{4} + \sum_{l=1}^{k}\frac{1}{\pi l^2}[(-1)^l - 1]\cos lx - \frac{1}{l}\sin lx \qquad \boxed{1/2}
\end{aligned}$$

(b)

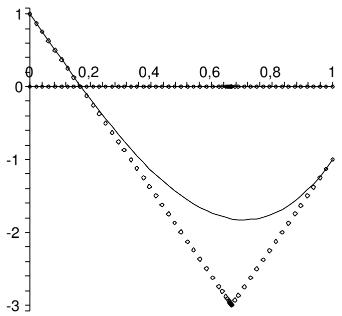
$$\begin{aligned}
b_{kn}(x) &= \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} x^k(1-x)^{n-k} \\
b_{03}(x) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} x^0(1-x)^{3-0} = 1 - 3x + 3x^2 - x^3 \\
b_{13}(x) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} x^1(1-x)^{3-1} = 3x - 6x^2 + 3x^3 \\
b_{23}(x) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} x^2(1-x)^{3-2} = 3x^2 - 3x^3 \\
b_{33}(x) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} x^3(1-x)^{3-3} = x^3
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{cccc|c}
\beta_0 & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \\
\hline
1 & & & & 1 \\
-3 & 3 & & & -6 \\
3 & -6 & 3 & & 0 \\
-1 & 3 & -3 & 1 & 4
\end{array} \quad \beta_0 = 1,\ \beta_1 = -1,\ \beta_2 = -3,\ \beta_3 = -1$$

$$p(x) = b_{03}(x) - b_{13}(x) - 3b_{23}(x) - b_{33}(x) \qquad \boxed{1}$$

Schema von de Casteljau zur Berechnung von $p\left(\frac{1}{2}\right)$:

$$\begin{array}{l|cccc}
\beta_0 = 1 & & & & \\
 & 0 & & & \\
\beta_1 = -1 & & -1 & & \\
 & -2 & & -\frac{3}{2} = p\left(\frac{1}{2}\right) & \\
\beta_2 = -3 & & -2 & & \\
 & -2 & & & \\
\beta_3 = -1 & & \boxed{1} & &
\end{array}$$



$$\begin{pmatrix} 0 \\ \beta_0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/n \\ \beta_1 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} n/n \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2/3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \boxed{1/2}$$

Abbildung 1: Polynom p liegt in der konvexen Hülle der Bezier-Punkte $\boxed{1/2}$