

UNIVERSITÄT KARLSRUHE (TH)

Institut für Praktische Mathematik

Prof. Dr. R. Scherer, Dipl.-Math. techn. M. Lehn

Klausur

Numerische Mathematik für die Fachrichtung Informatik und für Ingenieurwesen (SS 2004)

29. Juli 2004, 14:00 – 16:00 Uhr

Name:

Vorname:

Matrikel-Nr. :

Aufgabe	1			2			3			4			5		6		Σ
	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	c	a	b	a	b	
max. Pkte.	2	2	1	2	3	1	2	2	2	2	2	2	3	2	3	3	34
err. Pkte.																	

Hinweise:

1. Zugelassen zur Klausur sind alle Studierenden, die im Übungsbetrieb des SS 04 **mindestens 20 Punkte** erreicht haben.
2. Hilfsmittel wie Skripten, Vorlesungsmitschriften, Bücher, Taschenrechner, etc. sind **nicht** erlaubt.
3. Verwenden Sie bitte für jede Aufgabe ein **neues Blatt**, und versehen Sie es mit Ihrem **Namen** und Ihrer **Matrikelnummer**.
4. Bitte legen Sie Ihren Studierendenausweis bereit.
5. Die Bearbeitungszeit beträgt 120 Minuten.
6. Zum Bestehen der Klausur sind **14 Punkte** hinreichend.

Aufgabe 1:

Gegeben sei die Funktion $g(x) = 1 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{20}x^5$.

- Zeigen Sie, dass $g(x)$ im Intervall $[0, 1]$ genau einen Fixpunkt x^* besitzt und dass die Fixpunktiteration $x_{n+1} = g(x_n)$ für jeden Startwert $x_0 \in [0, 1]$ gegen x^* konvergiert.
- Wieviele Iterationsschritte des Verfahrens $x_{n+1} = g(x_n)$ müssen ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ mindestens durchgeführt werden, um $|x_n - x^*| < 10^{-3}$ garantieren zu können?
- Ausgehend vom Startwert $x_0 = 0$ liefert das Iterationsverfahren $x_{n+1} = g(x_n)$ die Näherungen $x_7 = 0.8780$ und $x_8 = 0.8775$.
Zeigen Sie, dass der Abstand von x_8 zum Fixpunkt x^* bereits kleiner als 10^{-3} ist.

Aufgabe 2:

- Gegeben seien die fünf Wertepaare (x_i, y_i) , $i = 0, \dots, 4$:

i	0	1	2	3	4
x_i	-2	-1	0	1	2
y_i	4	1	1	3	6

Bestimmen Sie die Parameter $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ für $f(x) = \alpha + \beta x^2$ so, dass

$$\Psi(\alpha, \beta) := \sum_{i=0}^4 |y_i - f(x_i)|^2 \text{ minimiert wird.}$$

- Gegeben sei das LGS $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 & 3 \\ -2 & -2 & -1 & -4 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad b = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie die LR-Zerlegung der Matrix A und lösen Sie damit das LGS.

- Wie wirkt sich bei der Lösung eines LGS $Ax = b$ eine Störung Δb der rechten Seite auf den relativen Fehler der Lösung x aus?

Aufgabe 3:

Gegeben sei das Polynom $p(x) = x^3 + 3x^2 + 6x - 6$.

- Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes von Gerschgorin einen Kreis um 0, in dem alle Nullstellen von $p(x)$ liegen.
- Verwenden Sie den Satz von Sturm, um die Anzahl der Nullstellen von $p(x)$ in den Intervallen $[-1, 0]$ und $[0, 1]$ zu bestimmen.
- Entwickeln Sie $p(x)$ nach Potenzen von $(x+1)$ mit Hilfe des vollständigen Hornerchemas.

Aufgabe 4:

Gegeben sei die Funktion $f(x) = \cos(2\pi x)$.

- (a) Berechnen Sie das algebraische Interpolationspolynom p_3 zu f bezüglich $x_0 = 0$, $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ in Newton-Gestalt und zeigen Sie, dass gilt

$$\max_{x \in [0,2]} |f(x) - p_3(x)| \leq 4\pi^4.$$

- (b) Geben Sie die Definition eines kubischen Splines an. Wie lauten die Bedingungen, um einen eindeutig bestimmten kubischen Spline s_f zu erhalten, der eine Funktion $f \in C^4[a, b]$ interpoliert? Wie verhält sich der Fehler $\|f - s_f\|_\infty$?
- (c) Geben Sie die Definition und die Rekursionsformel der Tschebyscheff-Polynome an. Skizzieren Sie $T_5(x)$.

Aufgabe 5:

- (a) Von der Funktion $f \in C([-1, 1])$ seien folgende Funktionswerte gegeben:

$$f(-1) = 0, \quad f\left(-\frac{1}{2}\right) = -1, \quad f(0) = 2, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = 1 \quad \text{und} \quad f(1) = -1.$$

Berechnen Sie mit Hilfe dieser Funktionswerte das Romberg-Schema für das Integral

$$I = \int_{-1}^1 f(x) dx.$$

- (b) Bestimmen Sie eine Quadraturformel mit den Knoten $x_1 = -1$, $x_2 = 0$ und $x_3 = \frac{1}{2}$ und dem Exaktheitsgrad 2 zur näherungsweisen Berechnung von $I = \int_{-1}^1 f(x) dx$.

Aufgabe 6:

- (a) Gegeben sei die Funktion $f(x) = \cos^2(x)$.

Bestimmen Sie bezüglich der Knoten $x_i = \frac{2i\pi}{3}$, $i = 0, 1, 2$, das reelle trigonometrische Interpolationspolynom $\tau_1(x)$ zu $f(x)$.

$$\left(\text{Hinweis: } \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}, \quad \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{3}.\right)$$

- (b) Gegeben seien die Bézier-Punkte $(0, -1)$, $(\frac{1}{3}, -2)$, $(\frac{2}{3}, -2)$, $(1, 8)$.

Bestimmen Sie die Bézier-Darstellung des Polynoms $p(x)$ zu den Bézier-Punkten und geben Sie die Definition der zugehörigen Bernstein-Grundpolynome an.

Berechnen Sie $p(\frac{1}{3})$ mit dem Algorithmus von de Casteljau.

Aufgabe 1 $g(x) = 1 - \frac{1}{8}x^2 - \frac{1}{20}x^5$

a) Zu zeigen: Vorauss. des BFPS

i) $[0, 1]$ abg. Intervall ✓

ii) g Selbstabbildung:

g monoton fallend in $[0, 1] \Rightarrow$

$$0 \leq g(1) = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{20} = \frac{33}{40} \leq g(x) \leq g(0) = 1, \quad x \in [0, 1]$$

iii) g Kontraktion:

$g'(x) = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{4}x^4$ monoton fallend in $[0, 1]$

$$g'(0) = 0, \quad g'(1) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} = -\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq g'(x) \leq 0, \quad x \in [0, 1]$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [0, 1]} |g'(x)| = \frac{1}{2} =: L$$

\Rightarrow Aussage

b) A priori Fehlabschätzung:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L^n}{1-L} |x_1 - x_0|$$

$$x_0 = 0, \quad x_1 = g(x_0) = g(0) = 1, \quad L = \frac{1}{2}$$

$$|x_n - x^*| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} < 10^{-3} \Leftrightarrow 2^{n-1} > 1000 \Rightarrow n-1 \geq 10$$

Es müssen also $n=11$ Schritte durchgeführt werden

c) A posteriori Fehlabschätzung:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{L}{1-L} |x_n - x_{n-1}|$$

$$|x_8 - x^*| \leq \frac{1}{1-\frac{1}{2}} |x_8 - x_7| = |0.8775 - 0.8780| = 0.0005 < 10^{-3}$$

$L = \frac{1}{2}$

Aufgabe 2

a) Gesucht: Lösung des überbestimmten LGS $Ax=y$ mit minimalem Euklidnorm des Residuums.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

Normalgleichung: $A^T A x = A^T y$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 10 & 34 \end{pmatrix}, A^T y = \begin{pmatrix} 15 \\ 44 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 10 & 15 \\ 10 & 34 & 44 \end{array} \right) \xrightarrow{-2} \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \beta = 1, \alpha = 1$$

$$b) \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 2 & 1 & -1 & +1 & -2 & \\ 2 & 2 & 4 & 3 & & & & \\ -2 & -2 & -1 & -4 & & & & \\ 4 & 2 & 1 & 1 & & & & \end{array} \right) \xrightarrow{\substack{-1 \\ -2 \\ -2}} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 2 & 2 & & & & \\ -1 & -1 & 1 & -3 & & & & \\ 2 & 0 & -3 & -1 & & & & \end{array} \right) \xrightarrow{+1} \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 2 & 2 & & & & \\ -1 & -1 & 3 & -1 & & & & \\ 2 & 0 & -3 & -1 & & & & \end{array} \right) \xrightarrow{+1} \sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 1 & 2 & 1 & & & & \\ 1 & 1 & 2 & 2 & & & & \\ -1 & -1 & 3 & -1 & & & & \\ 2 & 0 & -1 & -2 & & & & \end{array} \right)$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$Ax=b \Leftrightarrow LRx=b \Leftrightarrow \begin{array}{l} 1.) Ly=b \\ 2.) Rx=y \end{array}$$

$$Ly=b \Rightarrow y = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}, Rx=y \Rightarrow x = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$c) A(x+\Delta x) = (b+\Delta b), Ax=b \Rightarrow \|\Delta x\| = \|A^{-1} \Delta b\| \leq N(A^{-1}) \|\Delta b\|$$

$$\|b\| = \|Ax\| \leq N(A) \|x\| \Rightarrow \frac{\|b\|}{N(A)} \leq \|x\|$$

$$\text{Insgesamt: } \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq N(A) N(A^{-1}) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|} = \text{cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Aufgabe 3 $p(x) = x^3 + 3x^2 + 6x - 6$

a) $a_0 = -6, a_1 = 6, a_2 = 3$

i) $r \leq \max \left\{ 1, \sum_{i=0}^{n-1} |a_i| \right\} = \max \{ 1, 15 \} = 15$

ii) $r \leq \max \{ |a_0|, 1+|a_1|, \dots, 1+|a_{n-1}| \} = \max \{ 6, 7, 4 \} = 7$

\Rightarrow alle NS in $\mathbb{K}(0,7)$

b) Sturmsche Kette: $p_0(x) := p(x) = x^3 + 3x^2 + 6x - 6$

$p'(x) = 3x^2 + 6x + 6$ setze $p_1(x) = x^2 + 2x + 2$

Euclidischer Algorithmus:

$$\begin{array}{l} p_0 : p_1 \\ \hline (x^3 + 3x^2 + 6x - 6) : (x^2 + 2x + 2) = x + 1 \\ \hline -(x^3 + 2x^2 + 2x) \\ \hline x^2 + 4x - 6 \\ \hline -(x^2 + 2x + 2) \\ \hline 2x - 8 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow p_0(x) = (x+1)p_1(x) - (-2x+8) \\ \Rightarrow p_2(x) := -x+4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} p_1 : p_2 \\ \hline (x^2 + 2x + 2) : (-x + 4) = -x - 6 \\ \hline -(x^2 - 4x) \\ \hline 6x + 2 \\ \hline -(6x - 24) \\ \hline 26 \end{array} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow p_1(x) = (-x-6)p_2(x) - (-26) \\ \Rightarrow p_3(x) := -1 \end{array}$$

p_0, p_1, p_2, p_3 bilden eine SK auf $[-1,1]$, $V \in W$ Sei $x = \pm 1, x = 0$

x	$p_0(x)$	$p_1(x)$	$p_2(x)$	$p_3(x)$	$V \in W$
-1	-	+	+	-	2
0	-	+	+	-	2
1	+	+	+	-	1

\Rightarrow keine Nullstelle in $[-1,0]$,
eine Nullstelle in $[0,1]$
(Satz von Sturm)

c) Vollständiges Horner-Schema

$$\begin{array}{r} x = -1 \quad 1 \quad 3 \quad 6 \quad -6 \\ \quad \quad - \quad -1 \quad -2 \quad -4 \\ x = -1 \quad 1 \quad 2 \quad 4 \quad \boxed{-10} \\ \quad \quad - \quad -1 \quad -1 \\ x = -1 \quad 1 \quad 1 \quad \boxed{3} \\ \quad \quad - \quad -1 \\ \quad \quad \boxed{1} \quad \boxed{0} \end{array}$$

$\Rightarrow p(x) = -10 + 3(x+1) + (x+1)^2$

Aufgabe 4

①

a) $f(x) = \cos(2\pi x)$

x_i	0	$\frac{1}{2}$	1	2
$f(x_i)$	1	-1	1	1

Newton Schema:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & & \\ & \frac{1}{2} & -1 & \\ & & 1 & 1 \\ & & & 2 & 1 \end{array} \begin{array}{l} \rangle -4 \\ \rangle 4 \\ \rangle 0 \end{array} \begin{array}{l} \rangle 8 \\ \rangle -\frac{8}{3} \end{array} \rangle -\frac{16}{3}$$

$$\Rightarrow p_3(x) = 1 - 4x + 8x(x - \frac{1}{2}) - \frac{16}{3}x(x - \frac{1}{2})(x - 1)$$

$$f(x) - p_3(x) = \frac{1}{4!} f^{(4)}(\xi) \omega(x), \quad x \in [0, 2], \quad \xi(x) \in (0, 2)$$

$$f^{(4)}(x) = 16\pi^4 \cos(2\pi x) \Rightarrow \max_{x \in [0, 2]} |f^{(4)}(x)| = 16\pi^4$$

$$|\omega(x)| = |x(x - \frac{1}{2})(x - 1)(x - 2)| \leq 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1 \cdot 2 = 6, \quad x \in [0, 2]$$

$$\Rightarrow \max_{x \in [0, 2]} |f(x) - p_3(x)| \leq \frac{1}{4!} \cdot 16\pi^4 \cdot 6 = 4\pi^4$$

b) s heißt kubische Spline bzgl. $\Delta := \{x_0, \dots, x_n\}$ falls

i) $s|_{[x_{i-1}, x_i]} \in \mathcal{P}_3, \quad i = 1, \dots, n$

ii) $s \in C^2[x_0, x_n]$

s_f interpoliert f , falls gilt $s_f(x_i) = f(x_i), \quad i = 0, \dots, n$

Eindeutigkeit durch Randvorgaben: i) $s_f''(x_0) = s_f''(x_n) = 0$

oder ii) $s_f'(x_0) = f'(x_0), \quad s_f'(x_n) = f'(x_n)$

Äquidistantes Gitter: $\|f - s_f\|_\infty \leq 2h^4 \|f^{(4)}\|_\infty = \mathcal{O}(h^4), \quad (h \rightarrow 0)$

Aufgabe 4

②

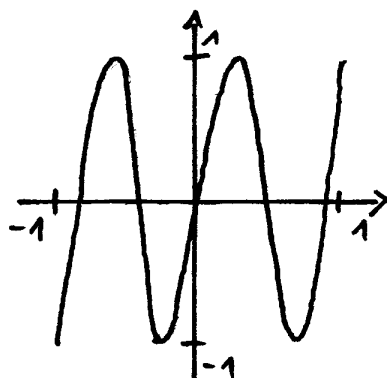
c) Def.: $T_n(x) = \cos n\theta$, $x = \cos(\theta)$, $0 \leq \theta \leq \pi$
oder $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$, $x \in [-1, 1]$, $n = 0, 1, 2, \dots$

Rekursionsformel: $T_0(x) = 1$

$$T_1(x) = x$$

$$T_{n+1}(x) = 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n = 1, 2, \dots$$

$T_5(x)$:



Aufgabe 5

a) $T_{0,n}$ zusammengesetzte Trapezregel zur Schrittweite

$$h_n = \frac{h_0}{2^n}, \quad n=0,1,2,\dots, \quad h_0 = b-a$$

$$T_{0,0} = 2 \left(\frac{1}{2} f(-1) + \frac{1}{2} f(1) \right) = -1$$

$$T_{0,1} = 1 \left(\frac{1}{2} f(-1) + f(0) + \frac{1}{2} f(1) \right) = \frac{3}{2}$$

$$T_{0,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} f(-1) + f(-\frac{1}{2}) + f(0) + f(\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} f(1) \right) = \frac{3}{4}$$

Romberg Schema:

$$\begin{array}{rcc} T_{0,0} = -1 & \begin{array}{l} \nearrow^{-\frac{1}{2}} \\ \searrow^{-\frac{1}{2}} \end{array} & T_{1,0} = \frac{7}{3} \\ T_{0,1} = \frac{3}{2} & \begin{array}{l} \nearrow^{-\frac{1}{3}} \\ \searrow^{-\frac{1}{3}} \end{array} & T_{1,1} = \frac{1}{2} \\ T_{0,2} = \frac{3}{4} & \begin{array}{l} \nearrow^{-\frac{1}{4}} \\ \searrow^{-\frac{1}{4}} \end{array} & T_{2,0} = \frac{17}{45} \end{array}$$

b) $x_1 = -1, x_2 = 0, x_3 = \frac{1}{2}, \int_{-1}^1 f(x) dx = \sum_{j=1}^3 \omega_j f(x_j) + R_f$

Exaktheitsgrad $m=2$:

$$m=0: \int_{-1}^1 1 dx = 2 \stackrel{!}{=} \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \quad (1)$$

$$m=1: \int_{-1}^1 x dx = 0 \stackrel{!}{=} -\omega_1 + \frac{1}{2}\omega_3 \quad (2)$$

$$m=2: \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} \stackrel{!}{=} \omega_1 + \frac{1}{4}\omega_3 \quad (3)$$

$$(2) + (3) \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{3}{4}\omega_3 \Rightarrow \omega_3 = \frac{8}{9}$$

$$(2) \Rightarrow \omega_1 = \frac{4}{9}$$

$$(1) \Rightarrow \omega_2 = 2 - \frac{4}{9} - \frac{8}{9} = \frac{2}{3}$$

Aufgabe 6

a) $f(x) = \cos^2 x$

x_i	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{4\pi}{3}$
$f(x_i)$	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
$\cos(x_i)$	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\sin(x_i)$	0	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$-\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$\tilde{r}_1(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \alpha_1 \cos x + \beta_1 \sin x$, IP-Bed: $\tilde{r}_1(x_i) = f(x_i)$, $i=0,1,2$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{3}{4} \end{array} \right) \xrightarrow{-1} \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{3}{4} \\ 0 & 0 & -\sqrt{3} & 0 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \beta_1 = 0, \alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_0 = 1$$

$$\tilde{r}_1(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos x$$

(oder: $\left. \begin{matrix} \alpha_0 \\ \beta_0 \end{matrix} \right\} = \frac{2}{2m+1} \sum_{j=0}^{2m} f(x_j) \begin{cases} \cos vx_j \\ \sin vx_j \end{cases}, m=1$)

b) Beziw-Punkte: $(0, -1), (\frac{1}{3}, -2), (\frac{2}{3}, -2), (1, 8)$

Beziw-Polynom: $p(x) = -1 \cdot b_{0,3}(x) - 2 \cdot b_{1,3}(x) - 2 \cdot b_{2,3}(x) + 8 \cdot b_{3,3}(x)$

Beuzstein-Grundpolynome: $b_{v,u}(x) = \binom{u}{v} t^v (1-t)^{u-v}$ ($u=3$)

Algorithmus von de Casteljau ($p(\frac{1}{3})$):

$$\begin{array}{ccccccc} -1 & & & & & & \\ & \nearrow & & & & & \\ & \frac{1}{3} & & & & & \\ & & & & & & \\ -2 & & & & & & \\ & \nearrow & & & & & \\ & \frac{2}{3} & & & & & \\ & & & & & & \\ -2 & & & & & & \\ & \nearrow & & & & & \\ & \frac{1}{3} & & & & & \\ & & & & & & \\ 8 & & & & & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccccc} -\frac{4}{3} & & & & & & \\ & \nearrow & & & & & \\ & \frac{2}{3} & & & & & \\ & & & & & & \\ -2 & & & & & & \\ & \nearrow & & & & & \\ & \frac{1}{3} & & & & & \\ & & & & & & \\ \frac{4}{3} & & & & & & \end{array} \quad \begin{array}{ccccccc} -\frac{14}{9} & & & & & & \\ & \nearrow & & & & & \\ & \frac{2}{3} & & & & & \\ & & & & & & \\ -\frac{8}{9} & & & & & & \\ & \nearrow & & & & & \\ & \frac{1}{3} & & & & & \end{array} \quad -\frac{28}{27} - \frac{8}{27} = -\frac{36}{27} = -\frac{4}{3}$$