Es sei G eine multiplikativ geschriebene Gruppe. Mit $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, sei

$$H_n := \{x^n \mid x \in G\}.$$

a) Zeigen Sie: Wenn G abelsch ist, dann ist H_n Untergruppe von G.

b) Weisen Sie anhand eines Gegenbeispiels nach, da die Aussage für nichtabelsche G im allgemeinen falsch ist.

Lösung:

a) Wir wenden das Untergruppenkriterium an.

- $H_n \neq \emptyset$, denn $1 = 1^n \in H_n$.
- Ist $x^n \in H_n$, so ist auch $(x^n)^{-1} = (x^{-1})^n \in H_n$.
- Sind $x^n \in H_n$ und $y^n \in H_n$, so ist auch $x^n \cdot y^n = xx \cdots x \cdot yy \cdots y = xyxy \cdots xy = (xy)^n \in H_n$, da in abelschen Gruppen x und y vertauschbar sind.

b) Die kleinste nichtabelsche Gruppe ist die symmetrische Gruppe S_3 mit den Elementen

$$\mathrm{id} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$\tau_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad \tau_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \tau_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Wir wählen $n = 3$ und finden $H_3 = \{\mathrm{id}, \tau_1, \tau_2, \tau_3\}$ wegen $\tau_i^3 = \tau_i$ $(i = 1,2,3)$ und $\sigma_j^3 = \mathrm{id}$ $(j = 1,2)$.
H_3 ist keine Untergruppe von S_3, weil $\tau_1 \circ \tau_2 = \sigma_2 \notin H_3$ gilt.

Es seien V ein n-dimensionaler $\mathbb{K}$-Vektorraum, $n \geq 2$, und Φ ein Endomorphismus von V. Alle $(n-1)$-dimensionalen Untervektorräume von V seien Φ-invariant.
Zeigen Sie:

a) Alle eindimensionalen Untervektorräume von V sind Φ-invariant.

b) Es gibt ein $c \in \mathbb{K}$, so daß $\Phi = c \cdot \mathrm{id}_V$ ist.

Lösung:
a) Für beliebiges $\mathbf{x}_1 \in V \setminus \{\mathbf{o}\}$ zeigen wir $\Phi([\mathbf{x}_1]) \subset [\mathbf{x}_1]$.
Dazu ergänzen wir $\mathbf{x}_1$ durch $\mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ zu einer Basis von V und setzen

$$U_j := [\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{j-1}, \mathbf{x}_{j+1}, \ldots, \mathbf{x}_n], \quad j \in \{2, \ldots, n\}.$$

Dann gilt $\dim U_j = n-1$ für $j \in \{2, \ldots, n\}$.
Beh.:

$$\bigcap_{j=2}^{n} U_j = [\mathbf{x}_1] \quad (*)$$

Bew.:
$'\supset'$ klar.
$'\subset'$ Sei $\mathbf{z} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}_n \in \bigcap_{j=2}^{n} U_j$. Dann muß für $j = 2, \ldots, n$ wegen $\mathbf{z} \in U_j$ gerade $\alpha_j = 0$ gelten. Also ist $\mathbf{z} = \alpha_1 \mathbf{x}_1 \in [\mathbf{x}_1]$. □

Nach diesen Vorüberlegungen gilt:

$$\Phi([\mathbf{x}_1]) \stackrel{(*)}{=} \Phi(\bigcap_{j=2}^{n} U_j) \subset \bigcap_{j=2}^{n} \Phi(U_j) \stackrel{\text{Vor.}}{\subset} \bigcap_{j=2}^{n} U_j \stackrel{(*)}{=} [\mathbf{x}_1].$$

b) Wegen a) gilt: $\forall \mathbf{x} \in V \; \exists \gamma_{\mathbf{x}} \in \mathbb{K} \, : \, \Phi(\mathbf{x}) = \gamma_{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{x}$.
Sei $\mathbf{x}_0 \in V$, $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{o}$, fest. Setze $c := \gamma_{\mathbf{x}_0}$.
Beh.: $\forall \mathbf{y} \in V \, : \, \Phi(\mathbf{y}) = c \cdot \mathbf{y}$.
Bew.:
1. Fall: $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}$ sind linear abhängig. $\Longrightarrow \mathbf{y} = \alpha \mathbf{x}_0$ mit $\alpha \in \mathbb{K}$

$$\Longrightarrow \Phi(\mathbf{y}) = \Phi(\alpha \mathbf{x}_0) = \alpha \Phi(\mathbf{x}_0) = \alpha(c\mathbf{x}_0) = c\mathbf{y}.$$

2. Fall: $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}$ sind linear unabhängig. Dann gilt:

$$\gamma_{\mathbf{x}_0+\mathbf{y}} \mathbf{x}_0 + \gamma_{\mathbf{x}_0+\mathbf{y}} \mathbf{y} = \gamma_{\mathbf{x}_0+\mathbf{y}}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x}_0 + \mathbf{y}) = \Phi(\mathbf{x}_0) + \Phi(\mathbf{y}) = c\mathbf{x}_0 + \gamma_{\mathbf{y}} \mathbf{y}.$$

Aus der linearen Unabhängigkeit von $\mathbf{x}_0$ und $\mathbf{y}$ folgt daraus $c = \gamma_{\mathbf{x}_0+\mathbf{y}} = \gamma_{\mathbf{y}}$, und damit letztendlich die Behauptung.

Für jedes $\gamma \in \mathbb{R}$ läßt sich bekanntlich

$$M_\gamma := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} + \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \gamma-2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma+2 \\ 2 \\ 0 \\ \gamma-1 \\ -2\gamma-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ \gamma-1 \end{pmatrix} \right] \subset \mathbb{R}^5$$

als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems interpretieren.
Berechnen Sie alle $\gamma \in \mathbb{R}$, für die sich M_γ als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems mit einer einzigen Gleichung schreiben läßt. Bestimmen Sie für jedes dieser γ eine solche Gleichung.
Lösung: Bekanntlich läßt sich die Lösungsmenge eines LGS $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{b}$ beschreiben durch eine Lösung des inhomogenen Systems und dem Lösungsraum L_h des homogenen Gleichungssystems $\mathcal{A}\vec{x} = \vec{o}$. Dabei gilt $\text{Rang}(\mathcal{A}) + \dim L_h = n = 5$. Da M_γ durch eine einzige Gleichung beschrieben werden soll, ist $\text{Rang}(\mathcal{A}) = 1$, woraus $\dim L_h = 4$ folgt. M_γ ist damit genau dann mit einer einzigen Gleichung beschreibbar, wenn die vier Vektoren, die L_h aufspannen, linear unabhängig sind. Linearkombinationen ergeben

$$\left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \gamma-2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma+2 \\ 2 \\ 0 \\ \gamma-1 \\ -2\gamma-1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ \gamma-1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ \gamma-2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \gamma+2 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma-2 \\ -2\gamma \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \right]$$

$$= \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2-\gamma \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ (\gamma+2)(\gamma-2) \\ \gamma-2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \gamma \end{pmatrix} \right] =: L_h^\gamma .$$

An der Stufenform dieser Vektoren liest man ab, da genau für $\gamma \notin \{0, 2\}$ $\dim L_h^\gamma = 4$ gilt. Also läßt sich M_γ genau für $\gamma \notin \{0, 2\}$ durch eine Gleichung beschreiben. Für diese γ lassen sich die L_h^γ erzeugenden Vektoren weiter vereinfachen.

$$L_h^\gamma = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2-\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma+2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2-\gamma \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -(\gamma+2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \gamma+2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Damit die homogene Gleichung $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 + a_5x_5 = 0$ die Lösungsmenge L_h^γ hat, muß gelten:

$$\begin{array}{lllll} 1a_1 & & +(2-\gamma)a_3 & & = 0 \\ & 2a_2 & -(\gamma+2)a_3 & & = 0 \\ & & (\gamma+2)a_3 & +1a_4 & = 0 \\ & & & 1a_5 & = 0 \end{array} \quad \text{beziehungsweise} \quad \begin{array}{lcl} a_1 & = & (\gamma-2)a_3 \\ a_2 & = & \frac{1}{2}(\gamma+2)a_3 \\ a_4 & = & -(\gamma+2)a_3 \\ a_5 & = & 0 \end{array}$$

Wählt man z.B. $a_3 = 1$, so erhält man die homogene lineare Gleichung

$$-(2-\gamma)x_1 + \frac{1}{2}(\gamma+2)x_2 + x_3 - (\gamma+2)x_4 = 0.$$

Einsetzen von $(0, 2, 0, 0, \gamma)^T$ in diese Gleichung ergibt die rechte Seite zu $\gamma + 2$, sodaß für $\gamma \notin \{0, 2\}$ die gegebene Menge M_γ beschrieben wird als Lösungsmenge der Gleichung

$$(\gamma-2)x_1 + \frac{1}{2}(\gamma+2)x_2 + x_3 - (\gamma+2)x_4 = \gamma + 2.$$

Es seien V ein reeller dreidimensionaler Vektorraum und $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ eine Basis von V.

a) Geben Sie eine Definition der Begriffe *Dualraum* V^* von V und *Dualbasis* B^* von B an.

b) Mit $\alpha \in \mathbb{R}$ seien

$$\begin{array}{rcrcrcr} \mathbf{c}_1 & = & & & (\alpha+1)\mathbf{b}_2 & + & (\alpha+1)(\alpha+2)\mathbf{b}_3 \\ \mathbf{c}_2 & = & \alpha\mathbf{b}_1 & + & (\alpha+1)\mathbf{b}_2 & + & (\alpha+1)\mathbf{b}_3 \ . \\ \mathbf{c}_3 & = & \mathbf{b}_1 & + & \mathbf{b}_2 & & \end{array}$$

Für welche $\alpha \in \mathbb{R}$ ist $C_\alpha := \{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3\}$ eine Basis von V? Stellen Sie für jedes dieser α die Vektoren der Dualbasis C_α^* von C_α als Linearkombinationen der Vektoren von B^* dar.

Lösung:

a) Die Menge der linearen Abbildungen $\Phi : V \to \mathbb{R}$ bildet (mit der punktweise definierten Addition und $\mathbb{R}$-Multiplikation) einen Vektorraum, den Dualraum V^* von V.
Ist $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ eine Basis von V, so heißt eine Basis $B^* = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$ Dualbasis von B, wenn für alle $i, j \in \{1,2,3\}$ gilt: $\Phi_i(b_j) = \delta_{ij}$.
b) C_α ist Basis $\iff$

$$0 \neq \begin{vmatrix} 0 & \alpha+1 & (\alpha+1)(\alpha+2) \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & \alpha+1 & (\alpha+1)(\alpha+2) \\ 0 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \alpha+1 \\ 0 & 1 & \alpha+1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \alpha+1$$

$$\iff \alpha \neq -1.$$

Gegeben: $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ und zugehörige Dualbasis $B^* = \{\Phi_1, \Phi_2, \Phi_3\}$.
Für $\alpha \neq -1$ ist $C_\alpha = \{\mathbf{c}_l = \sum\limits_{j=1}^{3} \gamma_{lj}\mathbf{b}_j | l = 1,2,3\}$ Basis.

Gesucht: Dualbasis $C_\alpha^* = \{\Psi_k = \sum\limits_{i=1}^{3} \lambda_{ik}\Phi_i | k = 1,2,3\}$ von C_α.

Ansatz: Für $k, l \in \{1,2,3\}$ gilt

$$\delta_{kl} \stackrel{!}{=} \Psi_k(\mathbf{c}_l) = \sum_{i=1}^{3} \lambda_{ik}\Phi_i(\sum_{j=1}^{3} \gamma_{lj}\mathbf{b}_j) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3} \lambda_{ik}\gamma_{lj} \underbrace{\Phi_i(\mathbf{b}_j)}_{=\delta_{ij}} = \sum_{i=1}^{3} \lambda_{ik}\gamma_{li}$$

$$\iff \quad (\lambda_{ik})_{i,k\in\{1,2,3\}} \quad \text{ist die inverse Matrix von} \quad (\gamma_{li})_{l,i\in\{1,2,3\}}.$$

Für die inverse Matrix ergibt sich:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \alpha+1 & (\alpha+1)(\alpha+2) & 1 & 0 & 0 \\ \alpha & \alpha+1 & \alpha+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & \alpha+1 & (\alpha+1)(\alpha+2) & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+1 & 0 & 1 & -\alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \alpha+1 & 1 & -(\alpha+1) & \alpha(\alpha+1) \\ 0 & 1 & \alpha+1 & 0 & 1 & -\alpha \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \alpha+1 & 1 & -(\alpha+1) & \alpha(\alpha+1) \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \alpha+2 & -\alpha(\alpha+2) \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 0 & \alpha+1 & 1 & -(\alpha+1) & \alpha(\alpha+1) \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \alpha+2 & -\alpha(\alpha+2) \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -(\alpha+2) & (\alpha+1)^2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -(\alpha+2) & (\alpha+1)^2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & \alpha+2 & -\alpha(\alpha+2) \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha+1} & -1 & \alpha \end{array}\right)$$

Damit lautet das Ergebnis:

$$\begin{array}{rclcrcrcl} \Psi_1 & = & & & \Phi_1 & - & \Phi_2 & + & \frac{1}{\alpha+1}\Phi_3 \\ \Psi_2 & = & - & (\alpha+2) & \Phi_1 & + & (\alpha+2)\Phi_2 & - & \Phi_3 \\ \Psi_3 & = & & (\alpha+1)^2 & \Phi_1 & - & \alpha(\alpha+2)\Phi_2 & + & \alpha\Phi_3 \end{array}$$

Es seien V ein Vektorraum über dem Körper $\mathbb{K}$ und Φ, Π Endomorphismen von V. Es gelte $\Pi^2 = \Pi$. Weiter sei $\mathbf{x}$ ein Eigenvektor von $\Pi \circ \Phi$ zum Eigenwert $\lambda \neq 0$.
Zeigen Sie:

a) $\mathbf{x} \in \mathrm{Bild}(\Pi)$.

b) $\Phi(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x} \in \mathrm{Kern}(\Pi)$.

c) Ist $\mathbf{x}$ außerdem Eigenvektor von Φ zu einem Eigenwert μ, so gilt $\lambda = \mu$.

Lösung:
a) $\mathbf{x}$ ist Eigenvektor von $\Pi \circ \Phi$ zum Eigenwert $\lambda \neq 0$. $\Longrightarrow \lambda\mathbf{x} = \Pi \circ \Phi(\mathbf{x})$. $\Longrightarrow \mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\Pi \circ \Phi(\mathbf{x}) = \Pi(\frac{1}{\lambda}\Phi(\mathbf{x}))$, also gilt $\mathbf{x} \in \mathrm{Bild}(\Pi)$.

Für die Teile b) und c) zeigen wir vorweg

$$\Pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \qquad (*).$$

Denn wegen a) existiert $\mathbf{y} \in V$ mit $\Pi(\mathbf{y}) = \mathbf{x}$, also

$$\Pi(\mathbf{x}) = \Pi(\Pi(\mathbf{y})) = \Pi^2(\mathbf{y}) \overset{\text{Vor.}}{=} \Pi(\mathbf{y}) = \mathbf{x}.$$

b) $\Phi(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x}$ ist Element von $\mathrm{Kern}(\Pi)$, denn es gilt

$$\Pi(\Phi(\mathbf{x}) - \lambda\mathbf{x}) = \underbrace{\Pi \circ \Phi(\mathbf{x})}_{=\lambda\mathbf{x}\ \text{Vor.}} - \underbrace{\lambda\Pi(\mathbf{x})}_{=\lambda\mathbf{x}\ (*)} = \mathbf{o}.$$

c) Sei nun $\Phi(\mathbf{x}) = \mu\mathbf{x}$. Dann folgt

$$\lambda\mathbf{x} \overset{\text{Vor.}}{=} \Pi \circ \Phi(\mathbf{x}) = \Pi(\Phi(\mathbf{x})) = \Pi(\mu\mathbf{x}) = \mu\Pi(\mathbf{x}) \overset{(*)}{=} \mu\mathbf{x}.$$

Wegen $\mathbf{x} \neq \mathbf{o}$, denn $\mathbf{x}$ ist Eigenvektor, folgt daraus $\lambda = \mu$.

Berechnen Sie mittels vollständiger Induktion für $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$, die Determinante $D_n(x)$ der reellen $n \times n$-Matrix

$$\begin{pmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$\begin{aligned}
D_1(x) &= 1+x^2 \\
D_2(x) &= \begin{vmatrix} 1+x^2 & x \\ x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)^2 - x^2 = 1 + x^2 + x^4 \\
D_3(x) &= \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 \\ x & 1+x^2 & x \\ 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} = (1+x^2)^3 - x^2(1+x^2) - x^2(1+x^2) = 1 + x^2 + x^4 + x^6
\end{aligned}$$

Behauptung: $D_n(x) = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} = \sum_{i=0}^{n} x^{2i}$
Beweis: Vollständige Induktion
Induktionsanfang: $n = 1, 2, 3$ siehe oben.
Induktionsvoraussetzung: Es gelte $D_{n-1}(x) = \sum_{i=0}^{n-1} x^{2i}$ und $D_{n-2}(x) = \sum_{i=0}^{n-2} x^{2i}$.
Induktionsschluß: Durch Entwickeln nach der ersten Zeile findet man

$$\begin{aligned}
D_n(x) &= \begin{vmatrix} 1+x^2 & x & 0 & \cdots & 0 \\ x & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \\
&= (1+x^2)D_{n-1}(x) - x \begin{vmatrix} x & x & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+x^2 & x & \ddots & \vdots \\ 0 & x & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & x \\ 0 & \cdots & 0 & x & 1+x^2 \end{vmatrix} \\
&= (1+x^2)D_{n-1}(x) - x^2 D_{n-2}(x) = (1+x^2)\sum_{i=0}^{n-1} x^{2i} - x^2 \sum_{i=0}^{n-2} x^{2i} \\
&= \sum_{i=0}^{n-1} x^{2i} + x^2 \sum_{i=0}^{n-1} x^{2i} - x^2 \sum_{i=0}^{n-2} x^{2i} = \sum_{i=0}^{n-1} x^{2i} + x^{2n} \\
&= \sum_{i=0}^{n} x^{2i} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n}\,.
\end{aligned}$$

Gegeben sei die komplexe Matrix

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}-\beta & -2\beta+1 & -\beta-1\\ 1 & 2 & 1\\ \beta & 2\beta-2 & \beta+1\end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie für alle $\beta\in\mathbb{C}$ die Jordansche Normalform von $\mathcal{A}$.

b) Berechnen Sie für $\beta=2$ Matrizen $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ mit $\mathcal{A}=\mathcal{B}+\mathcal{C}$, wobei $\mathcal{B}$ diagonalisierbar und $\mathcal{C}^2$ die Nullmatrix ist.

Lösung: a) $\det(\mathcal{A}-\lambda\mathcal{E})=$

$$\det\begin{pmatrix}-\beta-\lambda & -2\beta+1 & -\beta-1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ \beta & 2\beta-2 & \beta+1-\lambda\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow & \\ (\beta+\lambda) & (-\beta)\\ & \leftarrow\end{matrix}=\det\begin{pmatrix}0 & -\lambda^2+2\lambda-\beta\lambda+1 & \lambda-1\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 0 & \beta\lambda-2 & 1-\lambda\end{pmatrix}\begin{matrix}\leftarrow\\ |\\ (1)\end{matrix}$$

$$=\det\underbrace{\begin{pmatrix}0 & -\lambda^2+2\lambda-1 & 0\\ 1 & 2-\lambda & 1\\ 0 & \beta\lambda-2 & 1-\lambda\end{pmatrix}}_{\mathcal{A}^*}=(-1)(-\lambda^2+2\lambda-1)(1-\lambda)=-(\lambda-1)^3.$$

Damit ist $\lambda=1$ einziger Eigenwert von $\mathcal{A}$. In $\mathcal{A}^*$ den Eigenwert $\lambda=1$ eingesetzt ergibt

$$\operatorname{Rang}(\mathcal{A}-\mathcal{E})=\operatorname{Rang}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & \beta-2 & 0\end{pmatrix}=\left\{\begin{matrix}2 & \text{für} & \beta\neq 2\\ 1 & \text{für} & \beta=2\end{matrix}\right\}\Longrightarrow$$

$$\beta\neq 2:\text{3-2=1 Jkst.: }\operatorname{JNF}(\mathcal{A})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},\ \beta=2:\ \text{3-1=2 Jkst.: }\operatorname{JNF}(\mathcal{A})=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Für $\beta=2$ ergibt sich der Eigenraum E_1 von $\lambda=1$ aus $\mathcal{A}^*$ zu

$$E_1=\{\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}|x_1+x_2+x_3=0\}=[\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\ 0\\ -1\end{pmatrix}].$$

Für $(1,0,0)^T\notin E_1$ ergibt sich

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\ 1\\ 2\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-3\\ 1\\ 2\end{pmatrix}\in E_1,$$

und für die Transformationsmatrix $\mathcal{S}$ mit $\operatorname{JNF}(\mathcal{A})=\mathcal{S}^{-1}\mathcal{A}\mathcal{S}$ findet man

$$\mathcal{S}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\quad\text{und}\quad\mathcal{S}^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -1\end{pmatrix}.$$

Setze

$$\mathcal{B}:=\mathcal{S}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\mathcal{S}^{-1}=\mathcal{E}\quad\text{und}\quad\mathcal{C}:=\mathcal{S}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\mathcal{S}^{-1}=\begin{pmatrix}-3 & -3 & -3\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 2 & 2\end{pmatrix}.$$

Dann leisten diese Matrizen das Verlangte, denn es gilt

$$\mathcal{A}=\mathcal{B}+\mathcal{C}\quad\text{mit diagonalisierbarem }\mathcal{B}\text{ und}$$

$$\mathcal{C}^2=\mathcal{S}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\mathcal{S}^{-1}=\mathcal{S}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\mathcal{S}^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Im euklidischen Standardvektorraum $\mathbb{R}^5$ seien der Untervektorraum

$$U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right]$$

und der Vektor

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

gegeben.
Berechnen Sie den Abstand von $\mathbf{x}$ zu $U^\perp$.
Lösung: Berechne $U^\perp$ durch Lösen des homogenen LGS:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -4 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{ccc} (-1) & (2) & (-1) \\ \hookleftarrow & | & | \\ & \hookleftarrow & | \\ & & \hookleftarrow \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{ccc} \leftarrow & \leftarrow & \\ (-2) & | & (-2) \\ & (-1) & | \\ & & \hookleftarrow \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daraus folgt $x_3 = -x_5$, $x_2 = -x_5$, $x_1 = 3x_5$ beziehungsweise

$$U^\perp = \left\{ \begin{pmatrix} 3x_5 \\ -x_5 \\ -x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} | x_4, x_5 \in \mathbb{R} \right\} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Da die beiden $U^\perp$ erzeugenden Vektoren orthogonal sind, ergibt sich eine ONB von $U^\perp$ zu

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \mathbf{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{12}} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Projiziert man $\mathbf{x}$ orthogonal auf $U^\perp$ erhält man

$$\pi(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_1 \rangle \mathbf{x}_1 + \langle \mathbf{x}, \mathbf{x}_2 \rangle \mathbf{x}_2 = 1 \cdot \mathbf{x}_1 + 0 \cdot \mathbf{x}_2 = \mathbf{x}_1.$$

Der gesuchte Abstand ergibt sich damit zu

$$d(\mathbf{x}, U^\perp) = \|\pi(\mathbf{x}) - \mathbf{x}\| = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{10}.$$

Es sei E ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, $n \geq 1$, mit Skalarprodukt $\langle\, ,\, \rangle$. Für zwei feste Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E$ sei ein Endomorphismus $\Phi_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ von E definiert durch $\Phi_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{x}) := \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a}$.

a) Zeigen Sie, daß für die adjungierte Abbildung $(\Phi_{\mathbf{a},\mathbf{b}})^* = \Phi_{\mathbf{b},\mathbf{a}}$ gilt.

b) Für welche Paare $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ ist $\Phi_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ selbstadjungiert?

c) Zeigen Sie, daß $\det(\lambda \cdot \mathrm{id}_E - \Phi_{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = \lambda^{n-1}(\lambda - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle)$ gilt.

Lösung:
a) **Bew.**:

$$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in E : \langle \mathbf{x}, (\Phi_{\mathbf{a},\mathbf{b}})^*(\mathbf{y}) \rangle = \langle \Phi_{\mathbf{a},\mathbf{b}}(\mathbf{x}), \mathbf{y} \rangle = \langle\, \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle$$

$$= \langle \mathbf{x}, \langle \mathbf{a}, \mathbf{y} \rangle \mathbf{b}\, \rangle = \langle \mathbf{x}, \Phi_{\mathbf{b},\mathbf{a}}(\mathbf{y}) \rangle$$

Aus der Eindeutigkeit der adjungierten Abbildung folgt daraus $(\Phi_{\mathbf{a},\mathbf{b}})^* = (\Phi_{\mathbf{b},\mathbf{a}})$.

b)

$$\Phi_{\mathbf{a},\mathbf{b}} \text{ ist selbstadjungiert} \iff (\Phi_{\mathbf{a},\mathbf{b}})^* = (\Phi_{\mathbf{a},\mathbf{b}}) \overset{a)}{\iff}$$

$$(\Phi_{\mathbf{b},\mathbf{a}}) = (\Phi_{\mathbf{a},\mathbf{b}}) \iff \forall \mathbf{x} \in E : \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a}$$

Behauptung:

$$\forall \mathbf{x} \in E : \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a} \iff \mathbf{a}, \mathbf{b} \text{ sind linear abhängig.}$$

Bew.:

'$\Longrightarrow$' Für $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ ist die Gleichung erfüllt und $\mathbf{a} = \mathbf{o}, \mathbf{b}$ sind stets linear abhängig. Für $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ ergibt das Einsetzen von $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ die nichttriviale Darstellung

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a} = \mathbf{o}$$

des Nullvektors, so da auch in diesem Fall $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ linear abhängig sind.

'$\Longleftarrow$' Für $\mathbf{b} = \mathbf{o}$ ist die Gleichung erfüllt.
Für $\mathbf{b} \neq \mathbf{o}$ sei $\mathbf{a} = \lambda \mathbf{b}$ mit $\lambda \in \mathbb{R}$. $\Longrightarrow \forall \mathbf{x} \in E : \langle \mathbf{a}, \mathbf{x} \rangle = \lambda \langle \mathbf{b}, \mathbf{x} \rangle \Longrightarrow \forall \mathbf{x} \in E : \langle \mathbf{x}, \mathbf{a} \rangle \mathbf{b} = \lambda \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{b} = \langle \mathbf{x}, \mathbf{b} \rangle \mathbf{a}$

c) Im Fall $\mathbf{a} = \mathbf{o}$ gilt $\Phi_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \Omega$ und die Behauptung ist erfüllt.
Für $\mathbf{a} \neq \mathbf{o}$ ergänzen wir $\mathbf{a}$ zu einer Orthogonalbasis $\{\mathbf{a}, e_2, \ldots, e_n\}$. Bezüglich dieser Basis hat $\Phi_{\mathbf{a},\mathbf{b}}$ die Abbildungsmatrix

$$\mathcal{A}_{\mathbf{a},\mathbf{b}} = \begin{pmatrix} \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle & \langle e_2, \mathbf{b} \rangle & \cdots & \cdots & \langle e_n, \mathbf{b} \rangle \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Daran liest man ab:

$$\det(\lambda \mathrm{id}_E - \Phi_{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = \det(\lambda \mathcal{E} - \mathcal{A}_{\mathbf{a},\mathbf{b}}) = \lambda^{n-1}(\lambda - \langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle).$$

Es sei E ein n-dimensionaler euklidischer Vektorraum, $n \geq 1$, mit Skalarprodukt $\langle\, , \rangle$ und dadurch induzierter Norm $\| \, . \, \|$. Weiter sei Φ ein Endomorphismus von E mit der Eigenschaft, daß für alle Untervektorräume U von E

$$\Phi(U^{\perp}) = (\Phi(U))^{\perp}$$

gilt.
Zeigen Sie

a) Für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ folgt aus $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0$ stets $\langle \Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{y}) \rangle = 0$.

b) Für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ folgt aus $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$ stets $\|\Phi(\mathbf{x})\| = \|\Phi(\mathbf{y})\|$.

c) Es gibt eine Isometrie Ψ und ein $c \neq 0$ mit $\Phi = c \cdot \Psi$.

Lösung:
a) Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ mit $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = 0 \Longrightarrow \mathbf{y} \in [\mathbf{x}]^{\perp}$. Nach Voraussetzung gilt dann $\Phi(\mathbf{y}) \in [\Phi(\mathbf{x})]^{\perp}$, also $\langle \Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{y}) \rangle = 0$.

b) Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E$ mit $\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y}\|$. Dann gilt $\langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle = \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle$ beziehungsweise

$$\langle \mathbf{x}+\mathbf{y}, \mathbf{x}-\mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{x}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle + \langle \mathbf{y}, \mathbf{x} \rangle - \langle \mathbf{y}, \mathbf{y} \rangle = 0.$$

Damit gilt nach a) auch

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Phi(\mathbf{x}+\mathbf{y}), \Phi(\mathbf{x}-\mathbf{y}) \rangle = \langle \Phi(\mathbf{x}) + \Phi(\mathbf{y}), \Phi(\mathbf{x}) - \Phi(\mathbf{y}) \rangle \\ &= \langle \Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{x}) \rangle - \langle \Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{y}) \rangle + \langle \Phi(\mathbf{y}), \Phi(\mathbf{x}) \rangle - \langle \Phi(\mathbf{y}), \Phi(\mathbf{y}) \rangle. \end{aligned}$$

Also ist

$$\langle \Phi(\mathbf{x}), \Phi(\mathbf{x}) \rangle = \langle \Phi(\mathbf{y}), \Phi(\mathbf{y}) \rangle \text{ bzw. } \|\Phi(\mathbf{x})\| = \|\Phi(\mathbf{y})\|.$$

c) Wegen $\Phi(E) = \Phi(\,[\mathbf{o}]^{\perp}) = \Phi([\mathbf{o}])^{\perp} = [\mathbf{o}]^{\perp} = E$ ist Φ surjektiv und wegen $\dim E = n$ ein Automorphismus.
Beh.: $\exists c > 0 \, : \, \forall \mathbf{x} \in E : \|\Phi(\mathbf{x})\| = c\|\mathbf{x}\| \quad (*)$
Bew.: Für $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E \setminus \{\mathbf{o}\}$ existieren $c_{\mathbf{x}} > 0$ und $c_{\mathbf{y}} > 0$ mit

$$\|\Phi(\mathbf{x})\| = c_{\mathbf{x}}\|\mathbf{x}\| \quad \text{und} \quad \|\Phi(\mathbf{y})\| = c_{\mathbf{y}}\|\mathbf{y}\|.$$

Dann gilt wegen

$$\left\| \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x} \right\| = \left\| \frac{1}{\|\mathbf{y}\|}\mathbf{y} \right\| \quad \text{nach b) auch} \quad \left\| \Phi\left(\frac{1}{\|\mathbf{x}\|}\mathbf{x} \right) \right\| = \left\| \Phi\left(\frac{1}{\|\mathbf{y}\|}\mathbf{y} \right) \right\|.$$

Dies ist gleichbedeutend mit

$$c_{\mathbf{x}} = \frac{\|\Phi(\mathbf{x})\|}{\|\mathbf{x}\|} = \frac{\|\Phi(\mathbf{y})\|}{\|\mathbf{y}\|} = c_{\mathbf{y}} =: c. \qquad \square$$

Mit der Konstanten c aus $(*)$ definieren wir einen Automorphismus von E durch

$$\Psi := \frac{1}{c}\Phi.$$

Dann gilt für alle $\mathbf{x} \in E$:

$$\|\Psi(\mathbf{x})\| = \frac{1}{c} \cdot \|\Phi(\mathbf{x})\| = \frac{1}{c} \cdot c\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|.$$

Damit ist Ψ eine Isometrie. Mit $c \neq 0$ gilt $\Phi = c \cdot \Psi$, also die Behauptung.

Es sei V ein n-dimensionaler unitärer Vektorraum, $n \geq 1$, mit Skalarprodukt $\langle\, , \rangle$.
Zeigen Sie:

a) Ist Φ ein selbstadjungierter Endomorphismus von V mit ausschließlich positiven Eigenwerten, so ist $\langle \mathbf{v}, \Phi(\mathbf{v}) \rangle$ reell und positiv für alle $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{o}\}$.

b) Es seien $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$ linear unabhängige Vektoren und $\langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$ reell und positiv. Dann existiert ein selbstadjungierter Endomorphismus Φ von V mit ausschließlich positiven Eigenwerten, der $\Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ erfüllt.

Lösung:
a) Nach dem Spektralsatz existiert eine ONB aus Eigenvektoren von Φ

$$\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}, \quad \Phi(\boldsymbol{e}_i) = \lambda_i \boldsymbol{e}_i, \quad \lambda_i > 0 \text{ für } i = 1, \ldots, n.$$

Jeder Vektor $\mathbf{v} \in V \setminus \{\mathbf{o}\}$ hat dann die Darstellung $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{e}_i$ mit $\alpha_i \in \mathbb{C}$ und nicht alle $\alpha_i = 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{v}, \Phi(\mathbf{v}) \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{e}_i, \Phi(\sum_{j=1}^n \alpha_j \boldsymbol{e}_j) \right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i \boldsymbol{e}_i, \sum_{j=1}^n \alpha_j \lambda_j \boldsymbol{e}_j \right\rangle \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \alpha_i \overline{\lambda_j \alpha_j} \langle \boldsymbol{e}_i, \boldsymbol{e}_j \rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i |\alpha_i|^2. \end{aligned}$$

Offensichtlich folgt daraus $\langle \mathbf{v}, \Phi(\mathbf{v}) \rangle > 0$, da alle Summanden größer oder gleich Null sind und nicht alle Summanden verschwinden.
b) Für die linear unabhängigen Vektoren $\mathbf{v}, \mathbf{w}$ betrachten wir den zweidimensionalen Untervektorraum $W := [\mathbf{v}, \mathbf{w}]$ sowie die orthogonale Zerlegung des n-dimensionalen Vektorraums $V = W \oplus W^\perp$. Wir konstruieren den gesuchten Endomorphismus Φ, indem wir $\Phi|_W$ bestimmen und mit der Bedingung $\Phi|_{W^\perp} = \mathrm{id}$ auf V fortsetzen.
Für die Konstruktion von $\Phi|_W$ sei $\boldsymbol{e}_1 := \frac{\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}$, der durch $\boldsymbol{e}_2$ zu einer ONB von W ergänzt wird. Dann gilt $\mathbf{w} = \langle \mathbf{w}, \boldsymbol{e}_1 \rangle \boldsymbol{e}_1 + \langle \mathbf{w}, \boldsymbol{e}_2 \rangle \boldsymbol{e}_2$. Jeder selbstadjungierte Endomorphismus von W wird bezüglich dieser ONB durch eine hermitsche Abbildungsmatrix beschrieben

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha & \overline{\beta} \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}, \quad \alpha, \gamma \in \mathbb{R}, \beta \in \mathbb{C}. \qquad (*)$$

Es soll $\Phi(\mathbf{v}) = \mathbf{w}$ gelten, also

$$\Phi(\mathbf{v}) = \Phi(\|\mathbf{v}\| \boldsymbol{e}_1) = \|\mathbf{v}\| \Phi(\boldsymbol{e}_1) = \|\mathbf{v}\| (\alpha \boldsymbol{e}_1 + \beta \boldsymbol{e}_2) \stackrel{!}{=} \langle \mathbf{w}, \boldsymbol{e}_1 \rangle \boldsymbol{e}_1 + \langle \mathbf{w}, \boldsymbol{e}_2 \rangle \boldsymbol{e}_2 = \mathbf{w}.$$

Daraus ergibt sich

$$\alpha = \frac{\langle \mathbf{w}, \boldsymbol{e}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}\|} = \frac{\langle \mathbf{w}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} > 0 \text{ und } \beta = \frac{\langle \mathbf{w}, \boldsymbol{e}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}\|}.$$

Die Werte von α und β liegen nun fest. Es bleibt zu zeigen, daß γ so gewählt werden kann, daß Φ nur positive Eigenwerte besitzt. Wegen $\alpha > 0$ ist dies nach dem Hurwitzschen Definitheitskriterium genau dann der Fall, wenn $\det \mathcal{A} = \alpha\gamma - \beta\overline{\beta} > 0$ gilt. Wähle dazu $\gamma > \frac{|\beta|^2}{\alpha}$. Mit den drei Zahlen α, β, γ ist in $(*)$ die Abbildungsmatrix eines selbstadjungierten Endomorphismus auf W mit positiven Eigenwerten, der $\mathbf{v}$ auf $\mathbf{w}$ abbildet bezüglich der ONB $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ bestimmt. Ergänzt man $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$ durch eine ONB $\{\boldsymbol{e}_3, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ von $W^\perp$ zu einer ONB von V, so ist durch

$$\begin{pmatrix} \alpha & \overline{\beta} & & & \\ \beta & \gamma & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{pmatrix}$$

ein Endomorphismus von V mit den gewünschten Eigenschaften konstruiert.

Im reellen dreidimensionalen affinen Raum $\mathbb{A}^3$ sei bezüglich eines affinen Koordinatensystems $(O; \vec{b}_1, \vec{b}_2, \vec{b}_3)$ eine Quadrik gegeben durch die Gleichung

$$x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_2x_3 - 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 1 = 0\,.$$

Bestimmen Sie deren affine Normalform, und geben Sie eine zugehörige Koordinatentransformation an.

Lösung:

$$\begin{aligned}
& 0 &=& \; x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_2x_3 - 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 1 \\
\Longleftrightarrow\; & 0 &=& \; (x_1 + x_2 - 1)^2 - 2x_2^2 - 4x_2 + 4x_2x_3 - 2x_3^2 + 4x_3 \\
\Longleftrightarrow\; & 0 &=& \; (x_1 + x_2 - 1)^2 - 2(x_2 - x_3 + 1)^2 + 2 \\
\Longleftrightarrow\; & 0 &=& \; \left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2 - 1)\right)^2 - (x_2 - x_3 + 1)^2 + 1
\end{aligned}$$

Mit

$$\begin{aligned}
\overline{x}_1 &:= \frac{1}{\sqrt{2}}(x_1 + x_2 - 1) \\
\overline{x}_2 &:= x_2 - x_3 + 1 \\
\overline{x}_3 &:= x_3
\end{aligned}$$

folgt die Normalform

$$\overline{x}_1^2 - \overline{x}_2^2 + 1 = 0.$$

Es handelt sich bei der Quadrik um einen *hyperbolischen Zylinder*. Eine zugehörige Koordinatentransformation ist gegeben durch

$$\varphi \,:\, \vec{\overline{x}} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \vec{x} + \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$