Universität Karlsruhe (TH)
Fakultät für Informatik
Prof. Dr. Hartmut Prautzsch
Marcus Müller

Lösungen zur Klausur

Informatik III, WS 2002/2003

11. März 2003

Name: ____________________

Vorname: ____________________

Matrikelnummer: ____________________

Beachten Sie:

- Geben Sie Ihren **Namen**, **Vornamen** und **Matrikelnummer** auf diesem Deckblatt und auf jedem Aufgabenblatt an.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen auf die Aufgabenblätter und Rückseiten.
- Zum **Bestehen** der Klausur sind **20** der möglichen 60 **Punkte** notwendig.
- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	**Gesamt**
Erreichte Punkte						
Mögliche Punkte	12	12	12	12	12	**60**

Note	Bonus	**Endnote**

Name: Mat.-Nr.:

Aufgabe 1 (4 + 2 + 3 + 3 = 12 Punkte)

Sei $\mathcal{L} = \{a^m b^n c^{m-n} \mid m, n \in \mathbf{N}_0, m > n\}$.

(a) Geben Sie eine kontextfreie Grammatik G mit $\mathcal{L}(G) = \mathcal{L}$ an. (4 Punkte)

(b) Wie ist die Grammatik aus Teilaufgabe (a) zu ergänzen, wenn auf die Bedingung $m > n$ verzichtet wird und im Fall $m \leq n$ dabei $m - n := 0$ gelten soll? (2 Punkte)

(c) Zeigen Sie, dass die Sprache $\mathcal{L}$ nicht regulär ist. (3 Punkte)

(d) Geben Sie einen einfachen Kellerautomaten K an, für den gilt $\mathcal{L}(K) = \mathcal{L}$. (3 Punkte)

Lösung Aufgabe 1 (4 + 2 + 3 + 3 = 12 Punkte)

(a) $G = (\mathcal{A}, \mathcal{V}, S, \mathcal{P})$ mit

- den Terminalzeichen $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$,
- den Variablen $\mathcal{V} = \{S, A, B\}$,
- der Startvariablen S und
- den Produktionen $\mathcal{P} = \{S \to ac \mid aAc, A \to ac \mid aAc \mid B, B \to ab \mid aBb\}$.

(b) Es sind eine Variable C sowie die Produktionen $S \to C \mid \lambda$ und $C \to Cb \mid B \mid b$ hinzuzunehmen.

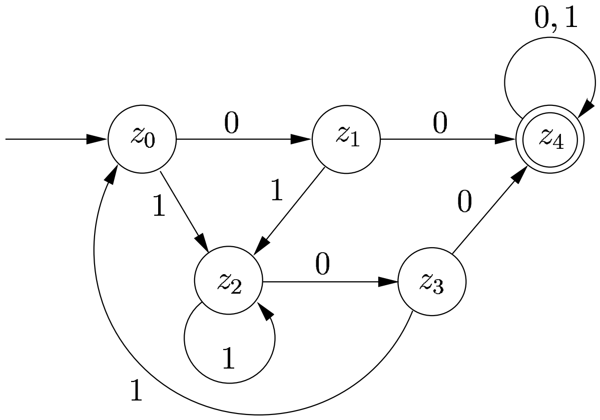
(c) Betrachte für $m = 2n$ und $n > 0$ das Wort $w = a^{2n} b^n c^n$ mit $|w| = 4n > n$ aus der Sprache $\mathcal{L}$. Gemäß dem Pump-Lemma gilt für jede Zerlegung $w = xyz$ mit $y \neq \lambda$ und $|xy| \leq n$, dass y nur aus a's besteht und mindestens ein a enthält. Somit ist $xz = a^{2n-|y|} b^n c^n \notin \mathcal{L}$ im Widerspruch zum Pump-Lemma. Damit ist gezeigt, dass $\mathcal{L}$ nicht regulär ist.

(d) $K = (\{a, b, c\}, \{S, A, B, a, b, c\}, \delta, S)$ mit
$\delta(a, a) = \{\lambda\}$
$\delta(b, b) = \{\lambda\}$
$\delta(c, c) = \{\lambda\}$
$\delta(\lambda, S) = \{ac, aAc\}$
$\delta(\lambda, A) = \{ac, aAc, B\}$
$\delta(\lambda, B) = \{ab, aBb\}$

Name: Mat.-Nr.:

Aufgabe 2 (7 + 5 = 12 Punkte)

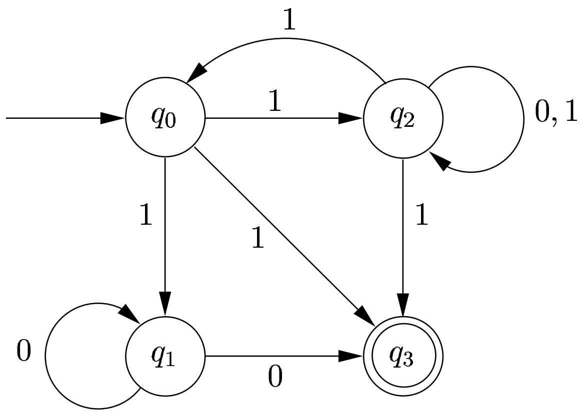
(a) Gegeben sei der deterministische endliche Automat
$M := (\{z_0, \ldots, z_4\}, \{0, 1\}, z_0, \delta, \{z_4\})$, wobei die Übergangsfunktion δ gegeben sei durch folgendes Übergangsdiagramm:



(i) Bestimmen Sie den zu M äquivalenten Minimalautomaten M'. (5 Punkte)

(ii) Geben Sie einen regulären Ausdruck R mit $\mathcal{L}(R) = \mathcal{L}(M')$ an. (2 Punkte)

(b) Gegeben sei der nichtdeterministische endliche Akzeptor (5 Punkte)
$N := (\{0, 1\}, \{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \delta, q_0, \{q_3\})$,
wobei δ durch das folgende Übergangsdiagramm bestimmt ist:



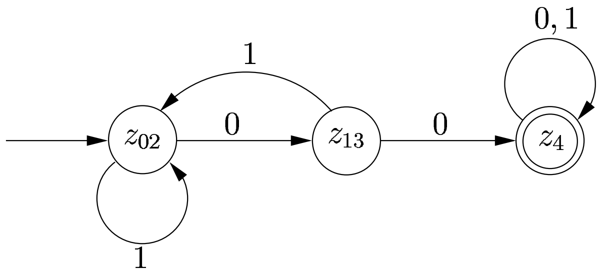
Überführen Sie den nichtdeterministischen endlichen Akzeptor N in einen deterministischen Automaten N' gemäß dem Verfahren aus der Vorlesung.

Lösung Aufgabe 2 (7 + 5 = 12 Punkte)

(a) (i) Es sind keine unerreichbaren Zustände zu entfernen.
Die weiteren Schritte des Algorithmus sind in folgendem Diagramm gekennzeichnet:

z_1	2			
z_2		2		
z_3	2		2	
z_4	1	1	1	1
	z_0	z_1	z_2	z_3

Verschmelze die Zustände z_0 und z_2 zu z_{02} sowie die Zustände z_1 und z_3 zu z_{13}.
Der Minimalautomat ist dann $M' = (\{z_{02}, z_{13}, z_4\}, \{0, 1\}, z_{02}, \delta', \{z_4\})$, wobei δ' durch folgendes Übergangsdiagramm gegeben ist:



(ii) $R = (1 + 01)^*00(0 + 1)^*$

(b) Es ergibt sich für die Übergangsfunktion δ' von N':

δ'	0	1	
p_0	p_1	p_2	$p_0 := \{q_0\}, p_1 := \emptyset, p_2 := \{q_1, q_2, q_3\}$
p_1	p_1	p_1	
p_2	p_2	p_3	$p_3 := \{q_0, q_2, q_3\}$
p_3	p_4	p_5	$p_4 := \{q_2\}, p_5 := \{q_0, q_1, q_2, q_3\},$
p_4	p_4	p_3	
p_5	p_2	p_5	

Damit ist der DFA $N' = (\{0, 1\}, \{p_0 \ldots p_5\}, \delta', p_0, \{p_2, p_3, p_5\})$

Aufgabe 3 (6 + 6 = 12 Punkte)

(a) Beweisen Sie die folgende Aussage: (6 Punkte)
Es existiert eine totale und berechenbare Funktion $g : \mathbf{N}^2 \to \mathbf{N}$,
so dass für beliebige $i, j, x \in \mathbf{N}$ die Gleichung

$$\varphi_{g(i,j)}(x) = \varphi_i(x) + \varphi_j(x)$$

gilt.

(b) Gegeben sei die Menge $\mathcal{M} := \{i \in \mathbf{N} \mid 10^{10} \notin \text{Bild}(\varphi_i)\}$. (6 Punkte)
Ist $\mathcal{M}$ rekursiv aufzählbar? Beweisen Sie Ihre Aussage.

Lösung Aufgabe 3 (6 + 6 = 12 Punkte)

(a) Die Funktion

$$g(i,j) ='' x_1 := \Phi(i, x_1) + \Phi(j, x_1)''$$

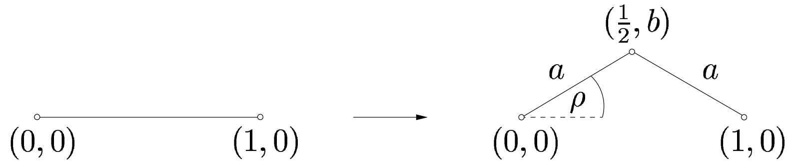
ist berechenbar, total und erfüllt die obige Gleichung.

(b) $\mathcal{M}$ respektiert offensichtlich Funktionen.
Sei a ein Index der nirgends definierten Funktion $\perp$. Weil $10^{10} \notin \text{Bild}(\perp)$, ist $a \in \mathcal{M}$.
Sei b ein Index der Identität. Weil $10^{10} = \varphi_b(10^{10})$, ist $b \notin \mathcal{M}$.
Da $\varphi_a \leq \varphi_b$, folgt mit der 1. Erweiterung des Satzes von RICE, dass $\mathcal{M}$ nicht rekursiv aufzählbar ist.

Name: Mat.-Nr.:

Aufgabe 4 (6 + 6 = 12 Punkte)

(a)



(i) Beschreiben Sie die Kurve, die sich durch iterative Ersetzungen von Kanten wie im Bild als Grenzkurve ergibt durch ein Lindenmayer-System.
Definieren Sie dabei die verwendeten Symbole. (2 Punkte)

(ii) Geben Sie ein iteriertes Funktionensystem an, das diese Kurve als Attraktor besitzt. (2 Punkte)

(iii) Welche Hausdorff-Dimension hat diese Kurve? (2 Punkte)

(b) Sei $\mathcal{A}$ das zu Grunde gelegte Alphabet.
Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) $\emptyset$ und $\mathcal{A}^*$ sind nicht NP-vollständig. (3 Punkte)

(ii) Aus P=NP folgt, dass jede Sprache $\emptyset \neq \mathcal{L} \neq \mathcal{A}^*$ mit $\mathcal{L} \in$ P auch NP-vollständig ist. (3 Punkte)

Lösung Aufgabe 4 (6 + 6 = 12 Punkte)

(a) Lindenmayer-System:

$$OLS = (\{F, +, -\}, F, \{F \to +F - -F+, + \to +, - \to -\})$$

mit den Bedeutungen

$$\begin{array}{lll} F & : & \text{Verschiebe Zeichenposition um } \begin{bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{bmatrix} a^n, n = \text{ Zahl der Iterationen} \\ + & : & \varphi := \varphi + \rho \\ - & : & \varphi := \varphi - \rho \end{array}$$

Iteriertes Funktionensystem:

$$\begin{aligned} f_1 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= a \begin{bmatrix} \cos\rho & -\sin\rho \\ \sin\rho & \cos\rho \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \\ f_2 : \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} &= a \begin{bmatrix} \cos(-\rho) & -\sin(-\rho) \\ \sin(-\rho) & \cos(-\rho) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ b \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Hausdorff-Dimension: $d = \frac{\ln 2}{\ln \frac{1}{a}}$

(b) (i) Für jede Abbildung $f : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$ und alle $w \in \mathcal{A}^*$ gilt

$$f(w) \notin \emptyset \text{ und } f(w) \in \mathcal{A}^*.$$

Also ist nur $\emptyset$ auf $\emptyset$ reduzierbar und nur $\mathcal{A}^*$ auf $\mathcal{A}^*$, aber keine andere Sprache in NP wie zum Beipiel die Sprache $\{\lambda\}$.

(ii) Betrachte eine beliebige Sprache $\mathcal{L} \in$ P mit $\emptyset \neq \mathcal{L} \neq \mathcal{A}^*$ und zeige, dass sie NP-vollständig ist:

(A) Es gilt $\mathcal{L} \in$ NP nach Voraussetzung.

(B) Zeige für eine beliebige Sprache $\mathcal{L}' \in$ NP, dass $\mathcal{L}' \leq_p \mathcal{L}$:

Nach Voraussetzung gilt $\mathcal{L}' \in$ P, d. h. $\mathcal{L}'$ ist in polynomialer Zeit deterministisch entscheidbar.

Sei $x \in \mathcal{L}$ und $y \notin \mathcal{L}$. Dann ist die Funktion $f : \mathcal{A}^* \to \mathcal{A}^*$, mit

$$f(w) := \begin{cases} x, & \text{falls } w \in \mathcal{L}' \\ y, & \text{falls } w \notin \mathcal{L}' \end{cases}$$

eine polynomiale Reduktion von $\mathcal{L}'$ auf $\mathcal{L}$.

Aufgabe 5 (12 Punkte)

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob diese *wahr* oder *falsch* sind.
Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es wird keine negative Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe geben.

	wahr	falsch
Es gibt keine nichtdeterministische Turing-Maschine mit Fehlerwahrscheinlichkeit 0.		×
Jede LR(2)-Grammatik ist auch eine LR(3)-Grammatik.	×	
Sei $\mathcal{A} = \{0, 1\}$ und $\mathcal{L} = \{0^n 1^n \mid n \in \mathbf{N}\}$. Dann gilt $01 \sim_{\mathcal{L}} 001$.		×
Zu jeder nichtdeterministischen Turing-Maschine gibt es eine sprachäquivalente deterministische Turing-Maschine.	×	
Das Wortproblem ist für kontextsensitive Sprachen entscheidbar.	×	
Sind $\mathcal{L}_1$ und $\mathcal{L}_2$ rekursiv aufzählbar, dann ist auch $\overline{\mathcal{L}_1 \cup \mathcal{L}_2}$ rekursiv aufzählbar.		×
Es gibt while-berechenbare totale Funktionen, die nicht loop-berechenbar sind.	×	
Es gibt Programme, die Ihren eigenen Index berechnen.	×	
Die Menge $\mathcal{M} = \{n \in \mathbf{N} \mid \phi_n \text{ ist surjektiv } \}$ ist nicht rekursiv.	×	
Sind P und Q Polyeder mit $P \subset Q$, gilt für die dualen Polyeder P^* und Q^*: $Q^* \subset P^*$.	×	
Es gilt $\{2, 5, 6, 7\} \in$ PARTITION.		×
Das Spiel mit der Gewinnmatrix $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ hat die Lösung (1,2).		×