

Universität Karlsruhe
Abteilung Geometrisches Modellieren
Prof. Dr. Hartmut Prautzsch
Dipl.-Inform. Lars Linsen



Lösungen zur Klausur

Informatik III, WS 1999/2000

14. April 2000

Name: _____
Vorname: _____
Matrikelnummer: _____

Beachten Sie:

- Geben Sie Ihren **Namen**, Ihren **Vornamen** und Ihre **Matrikelnummer** sowohl auf diesem Deckblatt als auch auf jedem der 5 Aufgabenblätter an.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen auf die Aufgabenblätter. Benutzen Sie gegebenenfalls die Rückseiten.
- Zum **Bestehen** der Klausur sind **20** der möglichen 60 **Punkte** notwendig.
- Es sind **keine Hilfsmittel** zugelassen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	Gesamt
Erreichte Punkte						
Mögliche Punkte	12	12	12	12	12	60

Note	Bonus	Endnote

Aufgabe 1

Sei $\mathcal{L} = \{a^n \mid n \in 3 + 6\mathbb{N}_0\}$.

- (a) Geben Sie eine rechtslineare Grammatik für \mathcal{L} an. (4 Punkte)
- (b) Geben Sie alle Äquivalenzklassen der Relation $\sim_{\mathcal{L}}$ an. (4 Punkte)
- (c) Zeigen Sie, dass jede unendlich große reguläre Sprache \mathcal{S} eine Folge von Worten α_n besitzt mit $|\alpha_n| = \mathcal{O}(n)$. (4 Punkte)

Lösung Aufgabe 1

- (a) $G = (\{S, A_1, \dots, A_5\}, \{a\}, S, \Pi)$ mit
 $\Pi = \{S \rightarrow aA_1, A_1 \rightarrow aA_2, A_2 \rightarrow aA_3 \mid a, A_3 \rightarrow aA_4, A_4 \rightarrow aA_5, A_5 \rightarrow aS\}$
- (b) $[a^i] = \{a^n \mid n = i \bmod 6\}$ für $i = 0, \dots, 5$.
- (c) Nach dem Pump-Lemma gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass sich jedes Wort $\omega \in \mathcal{S}$ mit $|\omega| \geq n$ in $\omega = \alpha\beta\gamma$ zerlegen lässt mit $|\alpha\gamma| < n$, $|\beta| \geq 1$ und $\alpha\beta^*\gamma \subset \mathcal{S}$.
 Da es über einem endlichen Alphabet nur endlich viele Wörter der Länge $< n$ gibt, existiert ein $\omega \in \mathcal{S}$ mit $|\omega| \geq n$.
 Wähle $\alpha_n := \alpha\beta^n\gamma$.
 Dann sind alle $\alpha_n \in \mathcal{S}$ und $|\alpha_n| = |\alpha\gamma| + n \cdot |\beta| = \mathcal{O}(n)$.

Aufgabe 2

Gegeben sei die kontextfreie Grammatik $G := (\{S, A, B, C, D, E, F, G, H\}, \{a, b, c\}, S, \Pi)$ mit folgenden Produktionen

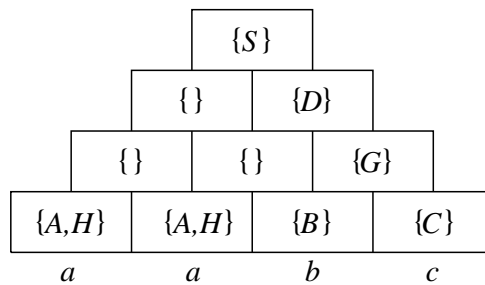
$$\begin{array}{lll} S \rightarrow HD & C \rightarrow c & F \rightarrow GG \\ A \rightarrow a & D \rightarrow HG & G \rightarrow BC \\ B \rightarrow b & E \rightarrow GA & H \rightarrow AE|GF|a \end{array}$$

- (a) Überprüfen Sie mit dem COCKE-KASAMI-YOUNGER-Algorithmus, ob das Wort $w := a^2bc$ in der Sprache $\mathcal{L}(G)$ liegt. (4 Punkte)
- (b) Ist $|\mathcal{L}(G)| < \infty$? (4 Punkte)
- (c) Bestimmen Sie die kleinsten Sprachen $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$ über $\{a, b\}$, die folgendes Gleichungssystem lösen: (4 Punkte)

$$\begin{array}{l} \mathcal{A} = a\mathcal{B} \\ \mathcal{B} = \mathcal{A}b + bb \\ \mathcal{C} = \mathcal{A}\mathcal{B} \end{array}$$

Lösung Aufgabe 2

(a) Anwenden des COCKE-KASAMI-YOUNGER-Algorithmus ergibt:



Also gilt: $w \in \mathcal{L}(G)$.

(b) Mit dem Algorithmus der Vorlesung ergibt sich für G_{CNF} :

Durchlauf	M
0	\emptyset
1	$\{A, B, C\}$
2	$\{A, B, C, G\}$
3	$\{A, B, C, G, E, F\}$
4	$\{A, B, C, G, E, F, H\}$
5	$\{A, B, C, G, E, F, H, D\}$
6	$\{A, B, C, G, E, F, H, D, S\}$
7	$\{A, B, C, G, E, F, H, D, S\}$

D.h. $|\mathcal{L}(G)| < \infty$.

- (c) Einsetzen der ersten Gleichung in die zweite liefert $\mathcal{B} = a\mathcal{B}b + bb$, so dass $\mathcal{B} = \{a^n b^{n+2} | n \in \mathbb{N}_0\}$.
Dieses eingesetzt in die erste Gleichung ergibt $\mathcal{A} = \{a^n b^{n+1} | n \in \mathbb{N}\}$.
Beides in die dritte Gleichung eingesetzt liefert noch $\mathcal{C} = \{a^n b^{n+1} a^m b^{m+2} | n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}_0\}$.

Aufgabe 3

- (a) Zeigen Sie, dass es keine totale berechenbare Funktion $g : \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{N}_0$ (4 Punkte) gibt, so dass für alle $m \in \mathbf{N}_0$ gilt:

$$\varphi_{g(m)}(x) = \begin{cases} x & \text{falls } \varphi_m(2) = \perp \\ x + \varphi_m(2) & \text{sonst} \end{cases}$$

Hinweis: Beweis durch Widerspruch und Verwendung des Rekursionssatzes.

- (b) Zeigen Sie, dass es eine totale berechenbare Funktion g gibt mit (4 Punkte)

$$\varphi_{g(n)}(x) = \begin{cases} x^2 & \text{falls } \varphi_n(n) \downarrow \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$$

- (c) Zeigen Sie mit Hilfe von (b), dass die Funktion $f : \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{N}_0$ mit (4 Punkte)

$$f(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi_n \text{ eine polynomielle Funktion ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

nicht berechenbar ist.

Lösung Aufgabe 3

- (a) Annahme: g ist total und berechenbar.

Dann gibt es nach dem Rekursionssatz ein $n \in \mathbf{N}_0$ mit $\varphi_{g(n)} = \varphi_n$.

1.Fall: $\varphi_n(2) \downarrow$

Dann gilt: $\varphi_n(2) = \varphi_{g(n)}(2) = 2 + \varphi_n(2)$.

Dies ist nicht erfüllbar, wenn $\varphi_n(2) \downarrow$. Widerspruch!

2.Fall: $\varphi_n(2) \uparrow$

Dann gilt: $\varphi_n(2) = \varphi_{g(n)}(2) = 2 \neq \perp$. Widerspruch!

- (b) Die Programmumschreibefunktion g mit

$g(n) := "x_2 := x_1; x_1 := n; \Phi(n, x_1); x_1 := x_2"$

erfüllt die Gleichung und ist total und berechenbar.

- (c) Annahme: f ist berechenbar.

Dann existiert ein Index n mit $f = \varphi_n$.

Nach Teilaufgabe (b) gilt: $\varphi_{g(n)}(x) = x^2 \forall x \in \mathbf{N}_0 \Leftrightarrow \varphi_n(n) \downarrow$.

Damit ist

$$\begin{aligned} f(g(n)) &= \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi_{g(n)} \text{ eine polynomielle Funktion ist} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1 & \text{falls } \varphi_n(n) \downarrow \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \\ &= \text{halt}(n) \end{aligned}$$

berechenbar. Widerspruch!

Aufgabe 4

Beweisen oder widerlegen Sie, dass folgende Mengen rekursiv aufzählbar sind:

- (a) $\mathcal{A} := \{i \in \mathbf{N}_0 \mid \varphi_i \text{ hat einen Fixpunkt}\}$ (4 Punkte)
- (b) $\mathcal{B} := \overline{\mathcal{A}}$ (4 Punkte)
- (c) $\mathcal{C} := \{i \in \mathbf{N}_0 \mid \varphi_i(x) = 2^x\}$ (4 Punkte)

Lösung Aufgabe 4

- (a) φ_i hat einen Fixpunkt $\Leftrightarrow \exists x \in \mathbf{N}_0 : \varphi_i(x) = x$.

Sei $f : \mathbf{N}_0 \rightarrow \mathbf{N}_0^2$ eine berechenbare Bijektion.

Betrachte folgendes while-Programm mit Index e :

$x_2 := 0; (y, z) := f(x_2);$

while $(\Phi(x_1, y) \uparrow \text{ in } z \text{ Schritten}) \vee (\Phi(x_1, y) \neq y)$

do $x_2 := x_2 + 1; (y, z) := f(x_2);$

end

Dann ist $\mathcal{D}(\varphi_e) = \mathcal{A}$, d.h. \mathcal{A} ist rekursiv aufzählbar.

- (b) Wäre \mathcal{B} rekursiv aufzählbar, dann wären \mathcal{A} und \mathcal{B} sogar rekursiv.

Da \mathcal{A} aber offensichtlich Funktionen respektiert und sowohl $\mathcal{A} \neq \emptyset$ (id besitzt Fixpunkt) als auch $\mathcal{A} \neq \mathbf{N}_0$ (\perp besitzt keinen Fixpunkt), ist dies nach dem Satz von RICE nicht der Fall.

- (c) \mathcal{C} respektiert offensichtlich Funktionen.

Sei $c \in \mathcal{C}$ beliebig und $i \in \mathbf{N}_0$ mit $\varphi_i \leq \varphi_c$ und $|\mathcal{D}(\varphi_i)| < \infty$.

Dann gibt es ein $x \in \mathbf{N}_0$ mit $\varphi_i(x) = \perp \neq 2^x$.

Daraus folgt, dass $i \in \overline{\mathcal{C}}$.

Nach der zweiten Erweiterung des Satzes von RICE ist \mathcal{C} nicht rekursiv aufzählbar.

Aufgabe 5

Kreuzen Sie für folgende Aussagen an, ob diese *wahr* oder *falsch* sind.

Hinweis: Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen. Es wird keine negative Gesamtpunktzahl für diese Aufgabe geben.

	wahr	falsch
\mathcal{A} NP-vollständig $\wedge \mathcal{A} \in P \Leftrightarrow P = NP$	×	
$SAT \in DTIME(2^n)$	×	
$\mathcal{L} \subseteq SAT \Rightarrow \mathcal{L}$ NP-vollständig		×
Die Äquivalenz von nichtdeterministischen endlichen Automaten ist NP-hart	×	
Das Wortproblem für kontextfreie Sprachen ist NP-hart		×
Für eine Indikatorvariable X gilt $E[X] = 1 \perp Pr[X = 0]$	×	
Für abhängige Ereignisse $\mathcal{E}_1, \mathcal{E}_2$ gilt: $Pr[\mathcal{E}_1 \mathcal{E}_2] \cdot Pr[\mathcal{E}_2] = Pr[\mathcal{E}_2 \mathcal{E}_1] \cdot Pr[\mathcal{E}_1]$	×	
Ein Las Vegas-Algorithmus liefert nicht immer das richtige Ergebnis		×
Monte-Carlo-Algorithmen liegen in PP		×
Im \mathbb{R}^5 sind Geraden dual zu zweidimensionalen Ebenen		×
Für einen planaren Graphen gilt: $\#Ecken + \#Kanten \perp \#Facetten = 2$		×
Die Matrix $\begin{bmatrix} 9 & 2 \\ 5 & \perp 1 \end{bmatrix}$ ist Gewinnmatrix eines Zweipersonennullsummenspiels	×	