

# Info II Tutorium

– Sommer 2006 –

Joachim Wilke

<http://joachim-wilke.de>

18. Mai 2006



Version 2.0

Quellennachweis & Dank an: Joachim Breitner, Felix Brandt, Roland Richter, Folien der Vorlesung.

# Übersicht



- 1 Organisatorisches
- 2 Altes Übungsblatt
- 3 Prädikatenlogik
- 4 Haskell

- 1 Organisatorisches
- 2 Altes Übungsblatt
- 3 Prädikatenlogik
- 4 Haskell

- Für die Aufgabe 5 gibts erst nach der Rechnerübung Punkte.
- Am 26.05. und am 16.06.2006 können leider keine Rechnerübungen stattfinden.

## Anmeldung auf der Webseite

Falls noch nicht geschehen, tragt bitte unbedingt Eure persönlichen Daten in das Anmeldeformular auf meiner Webseite. Vorher kann ich Euch keine Punkte geben!

- 1 Organisatorisches
- 2 Altes Übungsblatt**
- 3 Prädikatenlogik
- 4 Haskell

# Übungsblatt 2 – Nachbesprechung



## • Aufgabe 1

- Bei Aufgabe 1 waren viele Begründungen falsch (habe ich angestrichen). Jedoch war eigentlich gar keine Begründung verlangt, deswegen kein Punkteabzug.
- Laut Aufgabenstellung sind nur  $F$  und  $G$  prädikatenlogische Formeln. Wenn ihr  $A$  und  $B$  auch als PF deklariert habt, ist  $F_{10}$  gültig, sonst nicht.

## • Aufgabe 2

- Substitutionen sind auf Termen definiert, d.h. für eine Substitution  $[s/t]$  müssen  $s$  und  $t$  Terme sein. Im Rahmen der Info-II-Vorlesung werden jedoch nur Substitutionen betrachtet für die gilt, dass  $s$  ein Variablensymbol ist.
- Aufgabenstellung bei Teil 2 und 3 beachten: Betrachtet werden sollten Substitutionen die ein Variablensymbol durch eine Konstante ersetzen.

- 1 Organisatorisches
- 2 Altes Übungsblatt
- 3 Prädikatenlogik**
- 4 Haskell

# Einstiegsfragen



- 1 Warum sind  $P(x) \wedge Q(x)$  sowie  $(f(x) \wedge g(x))$  keine prädikatenlogische Formeln?
- 2 Was ist der Unterschied zwischen gebundener und ungebundener Umbenennung?
- 3 Bleibt sowohl bei freien als auch gebundenen Umbenennungen die Semantik der Formel immer erhalten?
- 4 Ist die Substitution  $[x/a]$  auf der Formel  $\forall xP(x)$  eine gebundene Umbenennung?

# Einstiegsantworten



- 1 Die Definition fordert, dass Ausdrücke wie der erste geklammert werden müssen. Der zweite Ausdruck kann nicht ausgewertet werden, da die Funktionen Werte und nicht wahr/falsch zurückgeben. Diese können nicht und-verknüpft werden.
- 2 Gebundene Umbenennung: Nur gebundene Variablen sind von der Umbenennung betroffen. Die Variablen dürfen nicht durch verschiedene Quantoren gebunden sein.  
Freie Umbenennung: Nur freie Variablen sind von der Umbenennung betroffen.
- 3 Nein, bei freien Umbenennungen kann gelten  $F \neq F_{[x/a]}$ .
- 4 Nein, gebundene Umbenennungen sind nur auf Variablen definiert.

# Bereinigen von Formeln



- Was versteht man unter dem Bereinigen von Formeln?
- Wozu braucht man es?

## Aufgaben

- 1  $(\forall x \forall y P(x, y, z) \wedge Q(x, z)) \equiv \dots$
- 2  $\forall z (\forall x P(x, y, z) \vee \forall x Q(x, z)) \equiv \dots$
- 3  $(\forall x Q(x, y, z) \vee \exists y P(x, y, z)) \equiv \dots$

## mögliche Lösungen

- 1  $\equiv \forall u \forall y P(u, y, z) \wedge Q(x, z)$
- 2  $\equiv \forall z (\forall x P(x, y, z) \wedge \forall u Q(u, z))$
- 3  $\equiv \forall w Q(w, y, z) \vee \exists u P(x, u, z)$

# Bereinigen von Formeln



- Was versteht man unter dem Bereinigen von Formeln?
- Wozu braucht man es?

## Aufgaben

- 1  $(\forall x \forall y P(x, y, z) \wedge Q(x, z)) \equiv \dots$
- 2  $\forall z (\forall x P(x, y, z) \vee \forall x Q(x, z)) \equiv \dots$
- 3  $(\forall x Q(x, y, z) \vee \exists y P(x, y, z)) \equiv \dots$

## mögliche Lösungen

- 1  $\equiv \forall u \forall y P(u, y, z) \wedge Q(x, z)$
- 2  $\equiv \forall z (\forall x P(x, y, z) \wedge \forall u Q(u, z))$
- 3  $\equiv \forall w Q(w, y, z) \vee \exists u P(x, u, z)$

# Pränexnormalform



- Was versteht man unter der Pränexnormalform?

## Aufgaben

- 1  $(\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)) \equiv \dots$
- 2  $(\forall xP(x) \vee (\forall yQ(x, y))) \equiv \dots$
- 3  $(\forall xP(x) \vee \exists xQ(x)) \equiv \dots$

## mögliche Lösungen

- 1  $\dots \equiv \forall x\forall y(P(x) \vee Q(y))$
- 2  $\dots \equiv \forall z\forall y(P(z) \vee Q(u, y))$
- 3  $\dots \equiv \forall x\exists y(P(x) \vee Q(y))$

# Pränexnormalform



- Was versteht man unter der Pränexnormalform?

## Aufgaben

- 1  $(\forall xP(x) \vee \forall xQ(x)) \equiv \dots$
- 2  $(\forall xP(x) \vee (\forall yQ(x, y))) \equiv \dots$
- 3  $(\forall xP(x) \vee \exists xQ(x)) \equiv \dots$

## mögliche Lösungen

- 1  $\dots \equiv \forall x\forall y(P(x) \vee Q(y))$
- 2  $\dots \equiv \forall z\forall y(P(z) \vee Q(u, y))$
- 3  $\dots \equiv \forall x\exists y(P(x) \vee Q(y))$



# Skolemnormalform



Eine Formel  $F$  ist in Skolemnormalform, wenn sie

- bereinigt ist und
- in Pränexnormalform und
- keine Existenzquantoren in ihr vorkommen.

Eine Formel kann wie folgt in Skolemnormalform umgeformt werden:

- 1 Formel bereinigen
- 2 Formel in Pränexnormalform bringen
- 3 die Existenzquantoren entfernen (skolemisieren)

Die so entstandene Skolemnormalform ist in der Regel nicht mehr kongruent zur Ausgangsformel sondern nur noch erfüllbarkeitsäquivalent.

# Skolemnormalform



## Kongruenz

Zwei Formeln  $F$  und  $G$  sind kongruent, wenn für jede auf sie passende Struktur  $\mathcal{A}$  gilt, dass  $\mathcal{A}(F) = \mathcal{A}(G)$  ist.

## Erfüllbarkeitsäquivalenz

Zwei Formeln  $F$  und  $G$  sind genau dann erfüllbarkeitsäquivalent, wenn beide erfüllbar sind oder beide unerfüllbar sind.

## Umformungsregeln

- $\neg\exists xP(x) \equiv \forall x\neg P(x)$
- $\neg\forall xP(x) \equiv \exists x\neg P(x)$
- $\neg(P(x) \vee Q(x)) \equiv \neg P(x) \wedge \neg Q(x)$



# Skolemnormalform - Aufgabe



Bringt  $\exists u(\exists x\forall yP(x, y, u) \vee \exists xQ(x, u))$  in Skolemnormalform.

## Mögliche Lösung

Bereinigen:  $\exists u(\exists x\forall yP(x, y, u) \vee \exists zQ(z, u))$

Pränexnormalform:  $\exists u\exists x\forall y\exists z(P(x, y, u) \vee Q(z, u))$

Skolemisieren:  $\forall y(P(b, y, a) \vee Q(h(y), a))$

## Skolemnormalform - Aufgabe



Bringt  $\exists u(\exists x\forall yP(x, y, u) \vee \exists xQ(x, u))$  in Skolemnormalform.

## Mögliche Lösung

Bereinigen:  $\exists u(\exists x\forall yP(x, y, u) \vee \exists zQ(z, u))$

Pränexnormalform:  $\exists u\exists x\forall y\exists z(P(x, y, u) \vee Q(z, u))$

Skolemisieren:  $\forall y(P(b, y, a) \vee Q(h(y), a))$



# Reihenfolge der Quantoren



- $F_1 = \exists x \forall y P(x, y)$  – es gibt keine feste Zahl  $x$  aus  $U$  die gleich alle anderen Zahlen  $y$  ist
- $F_2 = \forall x \exists y P(x, y)$  – für jede Zahl  $x$  aus  $U$  gibt es jeweils eine Zahl  $y$  die gleich  $x$  ist
- dabei sei  $\mathcal{A} = \{U, I\}$  mit  $I(P) = \{(x, y) \mid x = y\}$  und  $U = \{1, 2\}$

## Teilformeln



- Denkt an den rekursiven Aufbau von Formeln aus dem letzten Tutorium.
- Genau diese Teilformeln sind jetzt gesucht!

## Aufgaben

- 1  $F_1 = (\forall x P(x) \vee \forall x \neg Q(x))$
- 2  $F_2 = \forall x (P(x) \vee \exists x Q(x))$

## mögliche Lösungen

- 1  $\{F_1, \forall x P(x), \forall x \neg Q(x), P(x), \neg Q(x), Q(x)\}$
- 2  $\{F_2, (P(x) \vee \exists x Q(x)), P(x), \exists x Q(x), Q(x)\}$

# Teilformeln



- Denkt an den rekursiven Aufbau von Formeln aus dem letzten Tutorium.
- Genau diese Teilformeln sind jetzt gesucht!

## Aufgaben

- 1  $F_1 = (\forall x P(x) \vee \forall x \neg Q(x))$
- 2  $F_2 = \forall x (P(x) \vee \exists x Q(x))$

## mögliche Lösungen

- 1  $\{F_1, \forall x P(x), \forall x \neg Q(x), P(x), \neg Q(x), Q(x)\}$
- 2  $\{F_2, (P(x) \vee \exists x Q(x)), P(x), \exists x Q(x), Q(x)\}$

# Auswertung von Formeln



- Eine Formel  $F$  kann mit Hilfe einer passenden Struktur  $\mathcal{A}$  ausgewertet werden.
- Wenn die Auswertung ergibt, dass  $F$  unter  $\mathcal{A}$  wahr ist,  $\mathcal{A}(F) = 1$  sonst ergibt sie  $\mathcal{A}(F) = 0$ .
- Zur Auswertung wird  $F$  in die Struktur  $\mathcal{A}$  eingesetzt und schrittweise analysiert.

## Aufgabe

$$F = \forall x(P(x) \vee Q(x)),$$

$$\mathcal{A} = \{\mathbb{N}, I\} \text{ mit } I(P) = \{x \mid \frac{x}{2} \in \mathbb{N}\} \text{ und } I(Q) = \{x \mid \frac{x}{2} \notin \mathbb{N}\}$$

## Auswertung von Formeln - mögliche Lösung



$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}(F) &= \mathcal{A}(\forall x(P(x) \vee Q(x))) = \\
 &= \begin{cases} 1, & \text{falls für alle } t \text{ gilt, dass } \mathcal{A}(P(t) \vee Q(t)) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1, & \text{falls für alle } t \text{ gilt, dass } \mathcal{A}(P(t)) = 1 \text{ oder } \mathcal{A}(Q(t)) = 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1, & \text{falls für alle } t \text{ gilt, dass } \frac{t}{2} \in \mathbb{N} \text{ oder } \frac{t}{2} \notin \mathbb{N} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \\
 &= \begin{cases} 1, & \text{falls für alle } t \text{ gilt, dass } t \text{ gerade oder } t \text{ ungerade ist} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} = 1
 \end{aligned}$$

- 1 Organisatorisches
- 2 Altes Übungsblatt
- 3 Prädikatenlogik
- 4 Haskell**

# Zur Aufgabe 5



- die in Haskell schon vorhandenen Funktionen benutzen
- mit `putStr "Zeichenkette"` könnt ihr Nachrichten auf dem Bildschirm ausgeben
- mit `variable ← getLine` könnt ihr eine Zeichenkette von der Tastatur einlesen

Ende

