

Universität Karlsruhe
Mathematisches Institut I

Prof. Dr. M. Plum
Dr. Ch. Schmoeger

18. September 2002

Name:
Vorname:
Matrikel-Nr.:

HÖHERE MATHEMATIK I FÜR INFORMATIKER (ANALYSIS)

Schreiben Sie auf **jedes** Blatt rechts oben **deutlich lesbar** Ihren Namen, Vornamen und Ihre Matrikelnummer.

Jede vollständig gelöste Aufgabe wird mit **drei** Punkten bewertet. Die Prüfung in HM I/II hat bestanden, wer mindestens **10** Punkte erreicht.

Aufgabe	Punkte
1	
2	
3	
4	
5	
Summe	

Gesamtpunktzahl:	Note:
------------------	-------

Aufgabe 1

Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:

(a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{2x}$

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - 1 - 2x}{17x^2}$

(c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh(x+1)}{\sinh x}$

Aufgabe 2

- (a) Die Funktion $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar, und es existiere $c := \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$. Bestimmen Sie für jedes $a \in \mathbb{R}$ den Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - f(x+a)).$$

- (b) Bestimmen Sie $\lim_{x \rightarrow \infty} (x \arctan x - (x+3) \arctan(x+3))$.

Aufgabe 3

Bestimmen Sie zu folgenden Potenzreihen jeweils den Konvergenzradius:

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} (3^n + 4^n) x^n$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{n^2} x^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}} x^n$

Aufgabe 4

Zeigen Sie:

$$(a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} \text{ für alle } x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$$

$$(b) \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3} \text{ für alle } x \in (-1, 1).$$

Aufgabe 5

Berechnen Sie:

$$(a) \int_1^3 \frac{x^2 - 6x - 3}{x^4 + 2x^3 + x^2} dx$$

$$(b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^3 dx.$$

HÖHERE MATHEMATIK II FÜR INFORMATIKER (ANALYSIS)

Aufgabe 1

Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sin^2(x)(e^y - 1)}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Ist f stetig in $(0, 0)$? (Begründung!)
- (b) Untersuchen Sie, welche Richtungsableitungen von f in $(0, 0)$ existieren und bestimmen Sie sie gegebenenfalls.
- (c) Ist f differenzierbar in $(0, 0)$? (Begründung!)

Aufgabe 2

Bestimmen Sie Minima und Maxima der Funktion

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z$$

unter der Nebenbedingung

$$(x, y, z) \in T = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x-1)^2 + y^2 - 5 = 0, \quad y + z = 0 \right\}$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst, dass f ein Minimum und ein Maximum auf T besitzt.

Aufgabe 3

(a) Finden Sie eine Lösung des Bernoulli - Anfangwertproblems

$$y' = y - 2xy^3, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{e}, \quad \text{auf } \left[\frac{1}{2}, \infty\right)$$

(b) Finden Sie mit Hilfe der Methode der getrennten Veränderlichen eine Lösung des Anfangwertproblems

$$y' = -xy^3 e^{x^2 - y^{-2}}, \quad y(1) = 1, \quad \text{auf } [1, \infty)$$

Aufgabe 4

Bestimmen Sie ein reelles Fundamentalsystem des linearen Systems

$$y' = Ay$$

wobei

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie weiter die Lösung des Anfangwertproblems

$$y' = Ay, \quad y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 5

(a) Es sei

$$g(t) = \begin{cases} 1 - |t|, & |t| \leq 1 \\ 0, & |t| > 1 \end{cases}$$

Bestimmen Sie die Fouriertransformierte $\hat{g}(s)$ für alle $s \in \mathbb{R}$.

(b) Berechnen Sie für alle $s \in \mathbb{R}$ den Wert $\hat{g}'(s)$ der Fouriertransformierten von g' .

$$\text{Taylor-Reihe} \rightarrow \sin(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

Aufgabe 1:

a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\sin x)^{2x}$

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x) &:= (\sin x)^{2x} = \left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots \right)^{2x} \\ &= x^{2x} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right)^{2x} \\ &= \underbrace{(x^x)^2}_{\rightarrow 1 (x \rightarrow 0^+)} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \dots \right)^{2x}}_{\rightarrow 1 (x \rightarrow 0^+)} \end{aligned}$$

$$\xrightarrow{x \rightarrow 0^+} 1 \cdot 1 = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1$$

Aufgabe 1 l'Hospital

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+4x} - 1 - 2x}{17x^2} \stackrel{(x \rightarrow 0)}{\rightarrow} \frac{0}{0}$$

$$f(x) := \sqrt{1+4x} - 1 - 2x = (1+4x)^{\frac{1}{2}} - 1 - 2x$$

$$g(x) := 17x^2$$

l'Hosp.
~>

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+4x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 - 2 \stackrel{(x \rightarrow 0)}{\rightarrow} 0$$

$$g'(x) = 34x \stackrel{(x \rightarrow 0)}{\rightarrow} 0$$

l'Hosp.
~>

$$f''(x) = 2 \left(-\frac{1}{2} (1+4x)^{-\frac{3}{2}} \cdot 4 \right)$$

$$= -4 \frac{1}{(1+4x)^{\frac{3}{2}}} \stackrel{x \rightarrow 0}{\rightarrow} -4 \frac{1}{(1)^{\frac{3}{2}}} = -4$$

$$g''(x) = 34 \stackrel{x \rightarrow 0}{\rightarrow} 34$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{-4}{34} = \underline{\underline{-\frac{2}{17}}}$$

Aufgabe 1

$$\cosh(x) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x}); \sinh(x) = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$$

$$c) \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\cosh(x+1)}{\sinh(x)}$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x) &:= \frac{\cosh(x+1)}{\sinh(x)} = \frac{\frac{1}{2} \cdot (e^{x+1} + e^{-(x+1)})}{\frac{1}{2} (e^x - e^{-x})} = \frac{e^{x+1} + \frac{1}{e^{x+1}}}{e^x - \frac{1}{e^x}} \\ &= \frac{e^{x+1} \left(1 + \frac{1}{(e^{x+1})^2}\right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{(e^x)^2}\right)} = \frac{e^x \cdot e^1 \left(1 + \frac{1}{(e^{x+1})^2}\right)}{e^x \left(1 - \frac{1}{(e^x)^2}\right)} \\ &= \frac{e^1 \left(1 + \frac{1}{(e^{x+1})^2}\right)}{1 - \frac{1}{(e^x)^2}} \xrightarrow{(x \rightarrow \infty)} \frac{e^1 \cdot 1}{1} = e \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = e$$

Aufgabe 2

$$(MWS) \exists \xi \in (a, b): \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(\xi)$$

$$a) \text{ ges.: } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ db, } c := \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) \rightsquigarrow f \in C(\mathbb{R})$$

$$\text{MWS: } \exists \xi: \frac{f(b) - f(d)}{b - d} = f'(\xi), \xi \in (d, b)$$

$$\Rightarrow \exists \xi \in (x, x+a): \frac{f(x) - f(x+a)}{x - (x+a)} = f'(\xi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x) - f(x+a)}{-a} = f'(\xi)$$

$$\Leftrightarrow f(x) - f(x+a) = -a \cdot f'(\xi)$$

$$\Gamma \xi \in (x, x+a), \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = c \Rightarrow \lim_{\xi \rightarrow \infty} f'(\xi) = c$$

$$(*) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = \lim_{\xi \rightarrow \infty} f'(\xi) = c$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) - f(x+a) = \lim_{x \rightarrow \infty} -a \cdot f'(\xi)$$

$$\stackrel{(*)}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} -a \cdot f'(x)$$

$$= -a \cdot \lim_{x \rightarrow \infty} f'(x)$$

$$\stackrel{\text{Wert.}}{=} \underline{\underline{-a \cdot c}}$$

Aufgabe 2:

$$b) \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \arctan(x) - (x+3) \cdot \arctan(x+3)$$

Lösung:

$$\begin{aligned} f(x) &:= x \cdot \arctan(x) - (x+3) \cdot \arctan(x+3) \\ &= x \cdot \arctan(x) - x \cdot \arctan(x+3) - 3 \cdot \arctan(x+3) \end{aligned}$$

$$\arctan(x) = \arctan(x+3) \quad \text{ff} \forall x \in \mathbb{R} : x \geq x_0$$

$$\Rightarrow \arctan(x) - \arctan(x+3) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$\Rightarrow x \cdot \arctan(x) - x \cdot \arctan(x+3) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

$$\text{Es gilt: } \arctan(x) = \arctan(x+3) \rightarrow \frac{\pi}{2} \quad (x \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow f(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -3 \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\frac{3\pi}{2}$$

Mustelösung:

$$(x \cdot \arctan(x)) = \arctan(x) + \frac{x}{1+x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2}$$

$$\stackrel{(a)}{\Rightarrow} x \cdot \arctan(x) - (x+3) \arctan(x+3) \rightarrow -3 \cdot \frac{\pi}{2}$$

Aufgabe 3:

Bestimmen von Konvergenzradius

Sandwich-Theorem

a) $\sum_{n=0}^{\infty} (3^n + 4^n) x^n$

$$a_n := 3^n + 4^n \geq 0 \Rightarrow |a_n| = a_n$$

$$\sqrt[n]{4^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 4^n} \leq \sqrt[n]{4^n + 4^n} = \sqrt[n]{2 \cdot 4^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 4$$

$$\sqrt[n]{4^n} = 4 \rightarrow 4 \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\sqrt[n]{2 \cdot 4^n} = \sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{4^n} = 4 \cdot \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4 \cdot 1 = 4$$

$$\Rightarrow \sqrt[n]{4^n + 3^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{r = \frac{1}{4}}}$$

Aufgabe 3

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \rightarrow e \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$b) \sum_{n=0}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{n^2} x^n$$

$$a_n := \underbrace{\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{n^2}}_{\geq 0} \geq 0 \Rightarrow |a_n| = a_n$$

$$\begin{aligned} \sqrt[n]{|a_n|} &= \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{n^2}} \\ &= \left[\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{n \cdot n} \right]^{\frac{1}{n}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{(n \cdot n) \cdot \frac{1}{n}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \underbrace{\frac{1}{2}} \\ &= \left[\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)^{2n+1} \right]^{\frac{1}{2 + \frac{1}{n}}} \\ &\rightarrow e \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

$$\begin{cases} (2n+1) \cdot x = n \\ x = \frac{n}{2n+1} \\ = \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{e^{\left(\frac{1}{2}\right)}} = e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$$

Aufgabe 3

$$c) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{e^{n^2}} x^n$$

$$a_n = \frac{n!}{e^{n^2}} \geq 0 \Rightarrow |a_n| = a_n$$

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\frac{n!}{e^{n^2}}} = \frac{\sqrt[n]{n!}}{\sqrt[n]{e^{n \cdot n}}}$$

$$= \frac{\sqrt[n]{n!}}{(e^{n \cdot n \cdot \frac{1}{n}})}$$

$$= \frac{\sqrt[n]{n!}}{e^n}$$

$$\rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$$

$$\Rightarrow r = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} e^n} = \infty$$

Aufgabe 4

a) Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n = \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1) \setminus \{0\}$$

Musterlösung:

Alle auftretenden Potenzreihen haben Konvergenzradius $r=1$

\Rightarrow Gliedweise Differentiation und Integration erlaubt.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n+1} x^n &= \sum_{n=1}^{\infty} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^n \\ &= x \sum_{n=0}^{\infty} x^n - \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+1} x^{n+1} \\ &= \frac{x}{1-x} - \frac{1}{x} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} t^n dt \\ &= \frac{x}{1-x} - \frac{1}{x} \int_0^x \frac{t}{1-t} dt \\ &= \frac{x}{1-x} - \frac{1}{x} \int_0^x \left(-1 + \frac{1}{1-t} \right) dt \\ &= \frac{x}{1-x} - \frac{1}{x} \left(-x - \ln(1-x) \right) \\ &= -1 + \frac{1}{1-x} - 1 + \frac{\ln(1-x)}{x} \\ &= \frac{1}{1-x} + \frac{\ln(1-x)}{x} \quad \text{für } x \in (-1, 1) \setminus \{0\} \end{aligned}$$

a) Zeigen Sie:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n = \frac{2x}{(1-x)^3} \quad \text{für alle } x \in (-1, 1)$$

Musterlösung:

Alle auftretenden Potenzreihen haben Konvergenzradius $r=1$
 \Rightarrow Gliedweise Differentiation und Integration erlaubt.

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} n(n+1)x^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n \\ &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \int_0^x (n+1)t^n dt \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} (n+2) \cdot x^{n+1} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x (n+2) t^{n+1} dt \right) \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} \right) \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} \left(\frac{x^2}{1-x} \right) \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{2x(1-x) + x^2}{(1-x)^2} \right) \\ &= \frac{d}{dx} \left(\frac{2x - x^2}{(1-x)^2} \right) \\ &= \frac{(2-2x)(1-x)^2 + 2(2x-x^2)(1-x)}{(1-x)^4} \\ &= \frac{2(1-x)^2 + (2x-x^2) \cdot 2}{(1-x)^3} \\ &= \frac{2}{(1-x)^3} \end{aligned}$$

Aufgabe 5 p62

$$a) \int_1^3 \frac{x^2 - 6x - 3}{x^4 + 2x^3 + x^2} dx$$

Lösung:

$$f(x) := \frac{x^2 - 6x - 3}{x^4 + 2x^3 + x^2} = \frac{x^2 - 6x - 3}{x^2(x^2 + 2x + 1)} = \frac{x^2 - 6x - 3}{x^2(x+1)^2}$$

$$\stackrel{\text{p62}}{=} \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$$

Zuhalte-Methode:

$$b: x^2=0 \leadsto x=0 \Rightarrow b=-3$$

$$d: (x+1)^2=0 \leadsto x=-1 \Rightarrow d=4$$

$$\leadsto \frac{x^2 - 6x - 3}{x^2(x+1)^2} = \frac{-3}{x^2} + \frac{4}{(x+1)^2} + \frac{a}{x} + \frac{c}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x - 3}{x^2(x+1)^2} = \frac{-3(x+1)^2 + 4x^2}{x^2(x+1)^2} + \frac{a}{x} + \frac{c}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2 - 6x - 3}{x^2(x+1)^2} = \frac{-3x^2 - 6x - 3 + 4x^2}{x^2(x+1)^2} + \frac{a}{x} + \frac{c}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow 0 = \frac{a}{x} + \frac{c}{x+1} \Rightarrow a=c=0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \int_1^3 f(x) dx &= \int_1^3 \left(-\frac{3}{x^2} + \frac{4}{(x+1)^2} \right) dx = -3 \int_1^3 x^{-2} dx + 4 \int_1^3 (x+1)^{-2} dx \\ &= -3 \left[-x^{-1} \right]_1^3 + 4 \left[-(x+1)^{-1} \right]_1^3 \\ &= -3 \left[-\frac{1}{3} - (-1) \right] + 4 \left[-\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{2}\right) \right] \\ &= +1 - 3 - 1 + 2 \\ &= \underline{\underline{-1}} \end{aligned}$$

Aufgabe 5

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$$

$$b) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^3 dx$$

Lösung:

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Rightarrow \sin^2(x) = 1 - \cos^2(x) ; \cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) \quad (*)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx = [-\cos(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \underbrace{-\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) - (-\cos(0))}_{=0} = 1 \quad (**)$$

$$\begin{aligned} f(x) &:= (\sin(x))^3 = \sin(x) \cdot \sin^2(x) \stackrel{(*)}{=} (1 - \cos^2(x)) \cdot \sin(x) \\ &= \sin(x) - \cos^2(x) \sin(x) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^2(x)}_f \cdot \underbrace{\sin(x)}_{g'}$$

part. Int + (**)

$$= 1 - \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\cos^2(x)}_f \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_g \right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{2\cos(x)}_{f'} \cdot \underbrace{(\sin(x))}_g \cdot \underbrace{(-\cos(x))}_{g'} dx$$

$$= 1 - [-\cos^3(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(x) \cdot \sin(x) dx$$

$$\stackrel{(*)}{=} 1 + [\cos^3(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2(x)) \cdot \sin(x) dx$$

$$= 1 + [\cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right) - \cos^3(0)] + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) - \sin^3(x) dx$$

$$= 1 + [0 - 1] + 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(x) dx - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) dx$$

$$\stackrel{(**)}{=} 1 - 1 + 2 \cdot 1 - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) dx$$

$$= 2 - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) dx$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) dx = 2 - 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) dx$$

$$\Leftrightarrow 3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) dx = 2$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(x) dx = \frac{2}{3}$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx = \frac{2}{3}$$

HM2: Aufgabe 1

Musterlösung:

a) Nach dem MWS gilt:

$$|\sin(x)| \leq |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |e^y - 1| \leq e|e^y| \quad \forall |y| \leq 1$$

Sei $(x_n, y_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (0, 0)$, $z_n := \max\{|x_n|, |y_n|\}$

Es gilt $z_n \rightarrow 0$. Sei $n \in \mathbb{N}$:

Falls $(x_n, y_n) \neq (0, 0)$ ist

$$|f(x_n, y_n)| \leq \frac{e|x_n|^2|y_n|}{x_n^2 + y_n^2} \leq \frac{e z_n^3}{z_n^2} = e z_n$$

Falls $(x_n, y_n) = (0, 0)$ ist ebenfalls

$$0 = |f(x_n, y_n)| \leq e z_n$$

Also $f(x_n, y_n) \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), d.h. f stetig in $(0, 0)$.

b) Fall 1: $v_1 v_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} \stackrel{\text{L'Hospital}}{\leadsto} \frac{1}{t} f(tv_1, tv_2) &= \frac{\sin^2(tv_1) (e^{tv_2} - 1)}{t^3 \underbrace{(v_1^2 + v_2^2)}_{=1}} \\ &= \frac{\sin^2(tv_1)}{t^2 v_1^2} \cdot \frac{e^{tv_2} - 1}{tv_2} \cdot v_1^2 v_2 \\ &\longrightarrow v_1^2 v_2 \quad (t \rightarrow 0) \end{aligned}$$

Fall 2: $v_1 v_2 = 0$

Dann ist $\frac{1}{t} f(tv_1, tv_2) = 0 = v_1^2 v_2 \quad \forall t \neq 0$

In diesem Fall existiert also die Richtungsableitung und

$$\underline{\underline{\frac{\partial f}{\partial v}(0,0) = v_1^2 v_2}}$$

c) Nach b) haben speziell beide partielle Ableitungen in $(0,0)$ den Wert 0.

Da z.B. für $v = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$$\frac{1}{2\sqrt{2}} = v_1^2 v_2 = \frac{\partial f}{\partial v}(0,0) \neq \text{grad } f(0,0) \cdot v = 0$$

ist, kann f nicht differenzierbar in $(0,0)$ sein

HM2: Aufgabe 2

Lösung: f stetig und kompakt $\Rightarrow f$ besitzt Min- und Maximum auf T

$(x, y, z) \in T \Rightarrow h(x, y, z) = ((x-1)^2 + y^2 - 5, y+z)$

$h'(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x-2 & 2y & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (x^2 - 2x + y^2 - 4, y+z)$

Rang $h'(x, y, z) \stackrel{!}{=} 2 = p$
da 2 lin. unabhängige Zeilen

Lagrange $\Rightarrow H(x, y, z, \lambda_1, \lambda_2) = \underbrace{f(x, y, z)}_{x^2 + y^2 - z} + \lambda_1 \underbrace{h_1(x, y, z)}_{x^2 - 2x - 4 + y^2} + \lambda_2 \underbrace{h_2(x, y, z)}_{y+z}$

(1) $H'_x \stackrel{\partial}{=} 2x + \lambda_1(2x-2) \stackrel{!}{=} 0$

(2) $H'_y \stackrel{\partial}{=} 2y + \lambda_1 2y + \lambda_2 \stackrel{!}{=} 0$

(3) $H'_z \stackrel{\partial}{=} -1 + \lambda_2 \stackrel{!}{=} 0 \Rightarrow \lambda_2 = 1$

(4) $H_{\lambda_1} \stackrel{\partial}{=} x^2 - 2x - 4 + y^2 \stackrel{!}{=} 0$

(5) $H_{\lambda_2} \stackrel{\partial}{=} y + z \stackrel{!}{=} 0$

$[\lambda_2 = 1 \text{ in}] (2) \Rightarrow \lambda_1 = -\frac{1}{2y} - 1$

$[\lambda_1 = -\frac{1}{2y} - 1 \text{ in}] (1) \Rightarrow y = \frac{x-1}{2} (*)$

$[y = \frac{x-1}{2} \text{ in}] (4) \Rightarrow x^2 - 2x - 4 + (\frac{x-1}{2})^2 = 0$

$\Rightarrow x_1 = 3, x_2 = -1$

$x = 3$:

$[x = 3 \text{ in}] (*) \Rightarrow y = 1$

$[y = 1 \text{ in}] (5) \Rightarrow z = -1$

$x = -1$:

$[x = -1 \text{ in}] (*) \Rightarrow y = -1$

$[y = -1 \text{ in}] (5) \Rightarrow z = 1$

$\Rightarrow (3, 1, -1)$ und $(-1, -1, 1)$ sind Extremstellen

$f(3, 1, -1) = 11, f(-1, -1, 1) = 1$

$\Rightarrow f$ hat in $(-1, -1, 1)$ ein Minimum mit $f(-1, -1, 1) = 1$
und in $(3, 1, -1)$ ein Maximum mit $f(3, 1, -1) = 11$

HM2: Aufgabe 3

Lösung:

$$y' + g(x)y + h(x)y^p = 0$$

a) (7) $y' = y - 2xy^3 \Rightarrow y' - y + 2xy^3 = 0$

$$\leadsto g(x) = -1, h(x) = 2x, p = 3$$

$$p = 3 \Rightarrow [p \neq 0, p \neq 1] \text{ keine lin. Dgl.}$$

$$\hookrightarrow (8) z' = (p-1)g(x)z + (p-1)h(x)$$

$$= (3-1)(-1)z + (3-1)(2x)$$

$$= -2z + 4x$$

$$\leadsto y' = d(x)y + s(x)$$

\Rightarrow lin. Dgl.

Allg. Lösung der zugeh. hom. Gl.: $\leadsto y' = d(x)y \Rightarrow$ allg. Lsg: $y(x) = c \cdot e^{\beta(x)}$, $(\beta(x))' = d(x)$

$$z'_h = -2z \quad \leadsto d(x) = -2$$

$$\Rightarrow \text{Stammfkt von } d(x) = -2 \text{ ist } \beta(x) = -2x$$

$$\Rightarrow \text{allg. Lsg von } z'_h(x): \underline{\underline{z_h(x) = c e^{-2x}}}$$

inhom.

Spezielle Lösung: $\leadsto c'(x) = e^{-\beta(x)} \cdot s(x)$, $y_p = c(x) \cdot e^{\beta(x)}$ (Variation der Konstanten)

$$c'(x) = e^{2x} \cdot 4x$$

$$\int_{f'}^{g} e^{2x} \cdot 4x dx = 4x \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - \int \frac{1}{2} e^{2x} \cdot 4 dx$$

$$= 2x \cdot e^{2x} - 2 \int e^{2x} dx$$

$$= 2x \cdot e^{2x} - 2 \left(\frac{1}{2} e^{2x} \right)$$

$$= 2x \cdot e^{2x} - e^{2x}$$

$$= e^{2x} (2x - 1)$$

$$\Rightarrow c(x) = e^{2x} (2x - 1)$$

$$\Rightarrow z_p(x) = c(x) \cdot e^{\beta(x)} = e^{2x} (2x - 1) \cdot e^{-2x} = 2x - 1$$

$$\leadsto \underline{\underline{z_p(x) = 2x - 1}}$$

$$\hookrightarrow \text{allg. Lösung der lin. Dgl (8): } \underline{\underline{z(x) = z_h + z_p = c e^{-2x} + 2x - 1}}$$

\hookrightarrow Lösung von (7):

$$y(x) = z(x)^{\frac{1}{1-p}} = (c e^{-2x} + 2x - 1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{c e^{-2x} + 2x - 1}}, \quad y\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot 1 \Rightarrow c = 4$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y(x) = \frac{1}{\sqrt{4e^{-2x} + 2x - 1}}}} \text{ löst das ursprüngliche ANP.}$$

b) Musterlösung:

$$y' = -xy^3 e^{x^2-y^2}$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -xy^3 e^{x^2-y^2}$$

$$= \underbrace{-xe^{x^2}}_x \cdot \underbrace{y^3 \cdot e^{-y^2}}_y$$

Trennung der Variablen x, y

$$\Leftrightarrow dy = -xe^{x^2} \cdot y^3 \cdot e^{-y^2} dx$$

$$\Leftrightarrow dy = -xe^{x^2} dx \cdot y^3 \cdot \frac{1}{e^{y^2}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{e^{y^2}}{y^3} dy = -xe^{x^2} dx$$

$$\Rightarrow \int e^{y^2} y^{-3} dy = -\int x e^{x^2} dx$$

$$(e^{y^2})' = e^{y^2} \cdot (2) \cdot y^{-3} \stackrel{!}{=} e^{y^2} y^{-3} \Rightarrow | \cdot (-\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow (-\frac{1}{2} e^{y^2})' = e^{y^2} \cdot y^{-3}$$

$$\Rightarrow \int e^{y^2} y^{-3} dy = -\frac{1}{2} e^{y^2}$$

$$(e^{x^2})' = e^{x^2} \cdot 2x \stackrel{!}{=} e^{x^2} \cdot x \Rightarrow | \cdot \frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow (\frac{1}{2} e^{x^2})' = x \cdot e^{x^2}$$

$$\Rightarrow \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2} e^{y^2} = -\frac{1}{2} e^{x^2} \quad | \cdot (-2)$$

$$\Leftrightarrow e^{y^2} = e^{x^2}$$

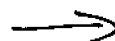
$$\Rightarrow e^{y^2} = e^{x^2} + c$$

$$\Leftrightarrow y^2 = \log(e^{x^2} + c)$$

$$\Leftrightarrow y = \pm (\log(e^{x^2} + c))^{-\frac{1}{2}} = \pm \frac{1}{\sqrt{\log(e^{x^2} + c)}}$$

$$\Rightarrow y(x) = \pm \frac{1}{\sqrt{\log(e^{x^2} + c)}}$$

Jetzt noch c bestimmen \triangleright



bestimmen von c:

Es muss gelten: $y(1) = 1$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\log(e^1 + c)}} = 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{\log(e^1 + c)} = 1$$

$x \in [1, \infty)$

$$\Leftrightarrow \log(e^1 + c) = 1$$

$$\Leftrightarrow e^1 + c = e^1$$

$$\Rightarrow c = 0$$

Eine Lösung des AWP ist also:

$$y(x) \stackrel{c=0}{=} \frac{1}{\sqrt{\log(e^{x^2})}}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{x^2}}$$

$$= \frac{1}{x}$$

$\Rightarrow y(x) = \frac{1}{x}$, da $y(1) = 1$ sein soll.

HM2: Aufgabe 4

Musterlösung:

Bestimme EVe von A:

$$\det(A - \lambda I) = \det(\lambda I - A) = \det \begin{pmatrix} \lambda & 0 & -4 \\ 0 & \lambda - 4 & 0 \\ 1 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \begin{matrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda - 4 \\ 1 & 0 \end{matrix}$$

Regel von
Sarrus

$$\begin{aligned} &= (\lambda \cdot (\lambda - 4) \cdot \lambda) + (0 \cdot 0 \cdot 1) + (-4 \cdot 0 \cdot 0) \\ &\quad - [(0 \cdot 0 \cdot \lambda) + (\lambda \cdot 0 \cdot 0) + (-4 \cdot (\lambda - 4) \cdot 1)] \end{aligned}$$

$$= (\lambda^2 \cdot (\lambda - 4)) + 4(\lambda - 4)$$

$$= (\lambda - 4) \cdot (\lambda^2 + 4)$$

$$= (\lambda - 4) \cdot (\lambda - 2i) \cdot (\lambda + 2i) \quad \left. \begin{matrix} i^2 = -1 \\ \\ \end{matrix} \right\} =: p$$

Charakteristisches
Polynom

$p=0$

$$\Rightarrow \lambda_1 = 4, \lambda_2 = 2i, \lambda_3 = -2i \quad \leadsto k_1 = k_2 = k_3 = 1, \text{ da immer 1-fache Nullstellen}$$

Bestimme Eigenräume zu den Eigenwerten:

$\lambda_1 = 4$:

$$A - 4I = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

löse hom. LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -4 & 0 \\ 1 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{\frac{1}{4}} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 0 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_3 = 0 \\ x_2 = r \end{matrix}$$

$$\Rightarrow \mathcal{L} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ r \\ 0 \end{pmatrix}, r \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ ist Lösung}$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(A - 4I) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_{\lambda_1} = \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$$

Bei doppelten Nst., d.h. $k=2$
müsste man eine Basis von
Kern $(A - 4I)^2$ bestimmen. falls $\in \text{Kern}(A - 4I)$
Das wäre hier $= \left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right]$
Bei $k=3$, wäre es $\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$

$$\underline{\lambda_2 = 2i}$$

$$A - 2iI = \begin{pmatrix} -2i & 0 & -4 \\ 0 & 4-2i & 0 \\ 1 & 0 & -2i \end{pmatrix} \begin{array}{l} \uparrow \\ \downarrow \\ \left. \vphantom{\begin{pmatrix} -2i & 0 & -4 \\ 0 & 4-2i & 0 \\ 1 & 0 & -2i \end{pmatrix}} \right\} 2i \end{array}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4-2i & 0 \\ 1 & 0 & -2i \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2i \\ 0 & 4-2i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 2i \\ x_2 = 0 \\ x_3 = r, r \in \mathbb{R} \end{array}$$

$$\Rightarrow \text{Kern}(A - 2iI) = \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow E_{\lambda_2} = \left[\begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

$$\underline{\lambda_3 = -2i} = 0 - 2i = \overline{\lambda_2} \text{ -komplex konjugiert} \Rightarrow \text{kein Eigenraum zu } \lambda_3 \text{ bestimmen}$$

Ein reelles Fundamentalsystem ist also:

$$\left\{ e^{4x} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \text{Real} \left(e^{2i x} \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right), \text{Imaginär} \left(e^{2i x} \begin{pmatrix} 2i \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ e^{4x} \\ 0 \end{pmatrix}, \text{R} \left(\begin{pmatrix} 2i e^{2ix} \\ 0 \\ e^{2ix} \end{pmatrix} \right), \text{I} \left(\begin{pmatrix} 2i e^{2ix} \\ 0 \\ e^{2ix} \end{pmatrix} \right) \right\}$$

$$e^{a+ib} = e^a (\cos(b) + i \sin(b))$$

$$\begin{aligned} \hookrightarrow 2ie^{2ix} &= 2ie^{2xi} = 2ie^{0+2xi} = 2ie^0 (\cos(2x) + i \sin(2x)) \\ &= 2i (\cos(2x) + i \sin(2x)) \\ &= \underbrace{2 \cos(2x)i}_{\text{I}} - \underbrace{2 \sin(2x)}_{\text{R}} \\ e^{2ix} &= e^{0+2xi} = e^0 (\cos(2x) + i \sin(2x)) = \underbrace{\cos(2x)}_{\text{R}} + i \underbrace{\sin(2x)}_{\text{I}} \end{aligned}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ e^{4x} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \sin(2x) \\ 0 \\ \cos(2x) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \cos(2x) \\ 0 \\ \sin(2x) \end{pmatrix} \right\} \text{ ist reelles FS}$$

$\gamma^{(1)} := \quad \gamma^{(2)} := \quad \gamma^{(3)} :=$

Allg. Lösung:

$$Y(x) = C_1 Y^{(1)}(x) + C_2 Y^{(2)}(x) + C_3 Y^{(3)}(x)$$

$$C = \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} \text{ bestimmen:}$$

$$Y(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow C_1 Y^{(1)}(0) + C_2 Y^{(2)}(0) + C_3 Y^{(3)}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & -2 \sin(0) & 2 \cos(0) \\ e^0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(0) & \sin(0) \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} \Rightarrow C_3 = 1 \\ \Rightarrow C_1 = 1 \\ \Rightarrow C_2 = 1 \end{array}$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Das AWP wird also gelöst von:

$$Y(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{4x} \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \sin(2x) \\ 0 \\ \cos(2x) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \cos(2x) \\ 0 \\ \sin(2x) \end{pmatrix}$$

HM2: Aufgabe 5

Musterlösung:

$$a) \quad \hat{g}(s) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \cdot e^{-ist} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^0 (1+t) e^{-ist} dt + \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1-t) e^{-ist} dt$$

part. int.

$$\stackrel{\vee}{=} \frac{1 - e^{is} + 1 - e^{-is}}{2\pi s^2}$$

$$= \frac{1 - e^0 (\cos(s) + i \sin(s)) + 1 - e^0 (\cos(-s) + i \sin(-s))}{2\pi s^2}$$

$$\cos(x) = \cos(-x)$$

$$-\sin(x) = \sin(-x)$$

$$\stackrel{\vee}{=} \frac{2 - 2\cos(s)}{2\pi s^2}$$

$$= \frac{1 - \cos(s)}{\pi s^2}$$

$$\hat{g}(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 g(t) \cdot e^{-is \cdot 0} dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 (1 - |t|) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_0^1 (1-t) dt$$

$$= \frac{1}{2\pi}$$

b)

g stückweise glatt und stückweise stetig

$\rightarrow g$ und g' sind integrierbar, wobei

$$g'(t) = \begin{cases} 1/2 & , t = -1 \\ 1 & , t \in (-1, 0) \\ -1 & , t \in (0, 1) \\ -1/2 & , t = 1 \\ 0 & , t = 0 \text{ oder } t \notin [-1, 1] \end{cases}$$

Varl.
 $\Rightarrow \hat{g}'(s) = is \hat{g}(s) = \begin{cases} \frac{i - i \cos(s)}{\pi s} & , s \neq 0 \\ 0 & , s = 0 \end{cases}$