Lösungsvorschläge Klausur WS 2001/2002

HM I und II FÜR INFORMATIKER

Universität Karlsruhe (TH)

---

gelesen von Prof. Dr. M. Plum
gesetzt mit LaTeX von Martin Röhricht

Aufgabe I.1
Es seien $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \dots, x_n > 0$. Zeigen Sie (z.B. durch vollständige Induktion):

$$(x_1 + x_2 + \dots x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots \frac{1}{x_n}\right) \geq n^2.$$

Hinweis: Geeignet zusammenfassen, Sie können $x + \frac{1}{x} \geq 2$ für $x > 0$ verwenden.
Lösungsvorschlag:
Beweis durch vollständige Induktion:
I.A.: $n = 1$: $x_1 \frac{1}{x_1} \geq 1 = n^2$
I.V.: Die Behauptung gelte für n beliebig.
I.S.: $n \rightsquigarrow n+1$

$$(x_1 + x_2 + \dots + x_n + x_{n+1})\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}}\right) =$$

$$\underbrace{(x_1 + x_2 + \dots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)}_{\geq n^2} + \underbrace{(x_{n+1})\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) + (x_1 + x_2 + \dots + x_n)\left(\frac{1}{x_{n+1}}\right)}_{\geq 2n\ (*)}$$

$$+ \underbrace{x_{n+1}\left(\frac{1}{x_{n+1}}\right)}_{=1} \geq n^2 + 2n + 1 = (n+1)^2$$

$\square$

(*) darf hier nach dem Hinweis so verwendet werden, denn es gilt:

$$(x_{n+1})\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \dots + \frac{1}{x_n}\right) + (x_1 + x_2 + \dots + x_n)\left(\frac{1}{x_{n+1}}\right) =$$

$$= \underbrace{\frac{x_{n+1}}{x_1}}_{=:y_1} + \underbrace{\frac{x_{n+1}}{x_2}}_{=:y_2} + \dots + \underbrace{\frac{x_{n+1}}{x_n}}_{=:y_n} + \underbrace{\frac{x_1}{x_{n+1}}}_{=\frac{1}{y_1}} + \underbrace{\frac{x_2}{x_{n+1}}}_{=\frac{1}{y_2}} + \dots + \underbrace{\frac{x_n}{x_{n+1}}}_{\frac{1}{y_n}} =$$

$$= \underbrace{\underbrace{y_1 + \frac{1}{y_1}}_{\geq 2} + \underbrace{y_2 + \frac{1}{y_2}}_{\geq 2} + \dots + \underbrace{y_n + \frac{1}{y_n}}_{\geq 2}}_{\geq 2n}$$

Aufgabe I.2

Berechnen Sie den Grenzwert von $b_n = \left(1 + \frac{2n}{3n^2+6}\right)^{n/2}$, $n \in \mathbb{N}$ für $n \to \infty$.

Lösungsvorschlag:

$$\left(1 + \frac{2n}{3n^2+6}\right)^{n/2} = \left(1 + \frac{2}{3n+\frac{6}{n}}\right)^{n/2} = \left(1 + \frac{2}{3}\frac{1}{n+\frac{2}{n}}\right)^{n/2} = \sqrt{\underbrace{\left(1 + \frac{2}{3}\frac{1}{n+\frac{2}{n}}\right)^{n}}_{\xrightarrow{n\to\infty} e^{2/3}}} \xrightarrow{n\to\infty} \sqrt{e^{2/3}} = e^{1/3}$$

Aufgabe I.3

Untersuchen Sie, ob folgende Reihen konvergieren, oder divergieren, gegebenenfalls abhängig von $\alpha \in \mathbb{R}$ (Fallunterscheidungen).

(a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\alpha^{n}$

(b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n}}$

(c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}}$ $(\alpha \in \mathbb{R})$.

Lösungsvorschlag:

(a)

$a_n := n^{\alpha}\alpha^n$. Wende Wurzelkriterium an: $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{n^{\alpha}}\,\sqrt[n]{\alpha^n}$

$\sqrt[n]{n^{\alpha}} \xrightarrow{n\to\infty} 1$ und $\sqrt[n]{\alpha^n} = \alpha$

$\rightsquigarrow \varrho := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n^{\alpha}\alpha^n|} = \alpha$

Für $\alpha \in [0, 1)$, ist $\sum a_n$ absolut konvergent.

Ist $\alpha > 1$, so ist $\sum a_n$ divergent.

Für $\alpha = 1$ auch Divergenz: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n = \infty$.

(b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \underbrace{\frac{\ln(n+1) - \ln n}{\sqrt{n}}}_{=:y_n}$$

$y_n = \frac{\ln(n+1)-\ln n}{\sqrt{n}} \leq \frac{\ln(n+1)}{\sqrt{n}} \leq \frac{\ln(n^2)}{\sqrt{n}} \xrightarrow{n\to\infty} 0$

Mit Leibniz-Kriterium ist die Reihe $\sum b_n = \sum (-1)^n \cdot y_n$ konvergent.

(c)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}} \ (\alpha \in \mathbb{R})$$

$c_n := \frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}} \leq \frac{\alpha^{2n}}{\alpha^{4n}} = \frac{1}{\alpha^{2n}}$

Fallunterscheidung:
$|\alpha| = 1$: Divergenz von $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}$, ansonsten Konvergenz:
$|\alpha| < 1$: $\frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}} \leq \frac{\alpha^{2n}}{1} \;\Rightarrow\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha^2)^n$ ist konv. Majorante.
$|\alpha| > 1$: $\frac{\alpha^{2n}}{1+\alpha^{4n}} \leq \frac{\alpha^{2n}}{\alpha^{4n}} = \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^n \;\Rightarrow\; \sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^n$ ist konv. Majorante.

Aufgabe I.4
Zeigen Sie: Für $x, y \in \left[-\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}\right]$ gilt $|\ln(\cos x) - \ln(\cos y)| \leq \sqrt{3}|x - y|$.
Hinweis: $\ln x = \log x$ $(x > 0)$.
Lösungsvorschlag:
Setze $a := -\frac{\pi}{3}$, $b := \frac{\pi}{3}$; $f(t) := \ln(\cos t) \rightsquigarrow f'(t) = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\tan t$.
f ist auf $[a, b]$ stetig und auf (a, b) differenzierbar. Dann gibt es nach dem Mittelwertsatz ein $\xi \in (a, b)$ mit

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$\ln(\cos x) - \ln(\cos y) = f(x) - f(y) = (x - y) \cdot f'(\xi)$
$f'(b) = -\tan(\frac{\pi}{3}) = -\sqrt{3}$ und
$f'(a) = -\tan(-\frac{\pi}{3}) = \sqrt{3}$
(Da $\sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ und $\cos(\frac{\pi}{3}) = \frac{1}{2}$)
Also ist $|f'(\xi)| \leq \sqrt{3}$.

$$\Rightarrow |\ln(\cos x) - \ln(\cos y)| \leq \sqrt{3}|x - y|$$

$\square$

Aufgabe I.5
Es sei $a > 0$ und $I := [-a, a]$. Für $n \in \mathbb{N}$ und $x \in I$ sei $f_n(x) := n \sin \frac{x}{n}$.
Zeigen Sie, daß die Folge (f_n) auf I punktweise gegen eine Funktion f konvergiert und bestimmen Sie f.
Zeigen Sie, daß die Konvergenz auf I sogar gleichmäßig ist.
Lösungsvorschlag:

$$f_n(x) = n \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{n} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} \left(\frac{x}{n}\right)^{2k+1}\right)}_{=\sin \frac{x}{n}} = x + \frac{1}{n^2}\left(-\frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5! \cdot n^3} - \ldots\right) \xrightarrow{n\to\infty} x + 0 = x.$$

$$\left(\text{Oder L'Hospital, oder } \frac{\sin \frac{1}{n}}{\frac{x}{n}} \cdot x \xrightarrow{n\to\infty} 1 \cdot x\right)$$

$$\Rightarrow f(x) = x \text{ auf I (sogar auf } \mathbb{R})$$

$$0 \leq |f_n(x) - f(x)| = \left|n \cdot \left(\sin \frac{x}{n} - \frac{x}{n}\right)\right| = \left|\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^k} \frac{x^{2k+1}}{n^{2k}}\right| \leq$$

$$\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a}{n}\right)^{2k} \frac{1}{(2k)^k} = \left(\cosh\frac{a}{n} - 1\right) \text{ bzw. } \leq \underbrace{e^{\frac{a}{n}} - 1 \xrightarrow{n\to\infty} 1 - 1 = 0}_{\text{unabhängig von x}} \quad (0 \leq |g_n(x)| \leq a_n \to 0)$$

$\Rightarrow$ glm. Konvergenz auf $I = [-a, a]$

Aufgabe I.6
Bestimmen Sie folgende Grenzwerte ($x \in \mathbb{R}$):

(a) $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{x^x - 1}{x}$

(b) $\lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{1}{x} - \cot x\right)$.

Lösungsvorschlag:

$$(a) \lim_{x\to 0+} \frac{x^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0+} \frac{e^{x\ln x} - 1}{x} \overset{\text{L'Hospital}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{e^{x\ln x}(\ln x + 1)}{1} = -\infty \quad (\text{da } e^{x\ln x} \xrightarrow{x\to 0+} 1)$$

$$(b) \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x - \frac{x^3}{3!} + O(x^5) - (x - \frac{1}{2}x^3 + O(x^5))}{x^2 - \frac{1}{3!}x^4 + O(x^6)} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3}x^3 + O(x^5)}{x^2 + O(x^4)} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{3} + O(x^2)}{1 + O(x)} x = \frac{1}{3} \cdot 0 = 0$$

Aufgabe I.7
Berechnen Sie folgende unbestimmte Integrale:

(a) $\displaystyle\int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + 1}\, dx$

(b) $\displaystyle\int \arctan x\, dx$.

Lösungsvorschlag:

$$(a) \int \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + 1}\, dx = \left\{ \begin{array}{c} e^x =: y \\ dy = e^x\, dx \end{array} \right\} = \int \frac{y - \frac{1}{y}}{y^2}\, dy = \ln|y| + \frac{1}{y} + c =$$

$$= \ln e^x + e^{-x} + c = x + e^{-x} + c \quad (c \in \mathbb{R}).$$

$$(b) \int 1 \cdot \arctan x\, dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2}\, dx = x \arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + c \quad (c \in \mathbb{R})$$

Aufgabe II.1

Es sei $f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2)$ für $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\},\ f(0,0) = 0$.

Zeigen Sie, daß f in $\mathbb{R}^2$ stetig differenzierbar ist und berechnen Sie für jede Richtung $v = (v_1, v_2),\ |v| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2} = 1$, die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}(x,y)$.

Lösungsvorschlag:

$f(x,y) = xy\ln(x^2+y^2),\ f(0) = 0$

$(x,y) \neq 0:\ \nabla f(x,y) = \left(y\ln(x^2+y^2) + \frac{xy}{x^2+y^2}\cdot 2x,\ x\ln(x^2+y^2) + \frac{2xy^2}{x^2+y^2}\right)$

$\partial_x f(0,0) = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x\cdot 0\cdot \ln(\dots)-0}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{0}{x} = 0 = \partial_y f(0,0)$ wegen Symmetrie $x \leftrightarrow y$

$\Rightarrow \nabla f(0,0) = (0,0)$

$\nabla f(x,y) = f'(x,y)$ für $(x,y) \neq 0$, weil die part. Ableitung (Komponenten von ∇f) dort stetig sind.

Diese Gleichheit gilt aber auch im Ursprung, denn mit $r := \sqrt{x^2+y^2}$:

$$0 \le |\partial_x f(x,y)| \le |y| \left(|\ln(r^2)| + \frac{2x^2}{r^2} \right) \le 2r|\ln r| + \frac{2r^2}{r} \xrightarrow{r\to 0} 0$$

$\Big((x,y) \to 0 \Leftrightarrow r \to 0,\ (\partial_y f)(x,y) \xrightarrow{r\to 0} 0 \text{ analog }\Big)$

$\Rightarrow$ in ganz $\mathbb{R}^2$ gilt $f'(x,y) = \nabla f(x,y)$ und somit

$$\frac{\partial f}{\partial v}(x,y) = \nabla f(x,y)\cdot v = v_1\cdot\partial_x f + v_2\partial_y f = \ln(x^2+y^2)\cdot(v_1 y + v_2 x) + \frac{2xy}{x^2+y^2}(v_1 x + v_2 y)\ \ ((x,y)\neq(0,0))$$

bzw. $= 0$ für $x = y = 0$

f' ist stetig in $\mathbb{R}^2$ weil $= \nabla f =$ stetig in $\mathbb{R}^2$ (oben schon gezeigt). □

Aufgabe II.2

Es sei $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z + \cosh(xyz),\ x, y, z \in \mathbb{R}$.

Zeigen Sie, daß es in einer Umgebung von $U \subseteq \mathbb{R}^2$ des Punktes $(x_0, y_0) = (0,0)$ eine Funktion $g : U \to \mathbb{R}$ gibt mit $f(x,y,g(x,y)) = 0$ für alle $(x,y) \in U$ und mit $g(0,0) = -1$.

Berechnen Sie auch $g'(0,0)$.

Lösungsvorschlag:

Es ist $f(0,0,-1) = -1 + \cosh 0 = 0$ und

$$f'(x,y,z) = (2x + yz\sinh(xyz),\ 2y + xz\sinh(xyz),\ 1 + xy\sinh(xyz))$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,-1) = 1 + 0\cdot 0\cdot 0 = 1 \neq 0, \quad ((\partial_z f)(0,0,-1))^{-1} \text{ ex. aber.}$$

Satz über implizit definierte Funktionen $\Rightarrow$ so ein verlangtes g existiert und in U gilt:

$$0 \equiv \frac{\partial f(x,y,g(x,y))}{\partial(x,y)} = \left.\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial(x,y)}\right|_{(x,y,g(x,y))} + \left.\frac{\partial f}{\partial z}\right|_{(x,y,g(x,y))} \cdot \frac{\partial g(x,y)}{\partial(x,y)}$$

$$\Rightarrow \text{ (oder die Formel direkt wissen) } \frac{\partial g(x,y)}{\partial(x,y)} = -\left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^{-1} \cdot \frac{\partial f}{\partial(x,y)} =$$

$$= -\frac{1}{1 + xy\sinh(xyz)} \cdot (2x + yz\sinh(xyz),\ 2y + xz\sinh(xyz)) \quad \text{mit } z = g(x,y)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial g}{\partial(x,y)}(0,0) = -\frac{1}{1+0}(0+0,\ 0+0) = (0,0)$$

Aufgabe II.3

Es sei $n \in \mathbb{N},\ a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \backslash \{0\}$ und $f(x) := \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j$ für $x \in \mathbb{R}^n$.

Bestimmen Sie das Maximum von $|f(x)|$ auf der Menge $M = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum\limits_{j=1}^{n} x_j^2 = 1 \right\}$.

Lösungsvorschlag:

Lagrange: Existenz von $f(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} a_j x_j \ (= (a|x))$

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} x_j^2 - 1 = |x|^2 - 1 = 0 \ \rightsquigarrow \ h(x,\lambda) = f(x) - \lambda g(x) \text{ ableiten}$$

$$\rightsquigarrow \partial_j f(x) = a_j = 2\lambda x_j \quad (j = 1, \ldots, n)$$

$$\Rightarrow \forall_j \in \{1, \ldots n\} \quad x_j = \frac{a_j}{2\lambda} \quad (\lambda \neq 0, \text{ sonst wäre } a = 0 \ \lightning)$$

$$\Rightarrow 1 = \sum x_j^2 = \frac{1}{4\lambda^2}|a|^2 \ \Rightarrow \lambda = \pm \frac{|a|}{2}$$

$$\lambda = \frac{|a|}{2} \ \Rightarrow x = \frac{a}{|a|};\ \lambda = -\frac{|a|}{2} \ \Rightarrow x = -\frac{a}{|a|}$$

$$f\left(\frac{a}{|a|}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{a_j^2}{|a_j|} = |a| = -f\left(-\frac{a}{|a|}\right).$$

Da $M = \{x \in \mathbb{R}^n :\ g(x) = 0\}$ kompakt ist, existieren $\max f(M)$ und $\min f(M)$ (f und g sind stetig).
Da wir mit Lagrange nur zwei Kandidaten gefunden haben, sind dies auch die gesuchten Extremstellen.

$$\Rightarrow \ \max|f(M)| = |a|$$

Anderer Weg: Cauchy-Schwarz $|f(x)| = |(a|x)| \leq |a| \cdot |x|$
Gleichheit gdw. $a = \mu \cdot x$ (oder $x = \tilde{\mu} \cdot x$, wegen $a \neq 0$ reicht der erste Fall)
$\Rightarrow \ 1 = |x| = \frac{|a|}{|\mu|} \quad \mu = \pm|a|,\ x = \pm\frac{a}{|a|}$ wie oben.

Aufgabe II.4

Berechnen Sie $\int\limits_V f(x,y,z)\ d(x,y,z)$ für $f(x,y,z) = y$,

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4,\ z \geq 0,\ y \geq 0\}.$$

Lösungsvorschlag:

$$V = \tfrac{1}{4} \text{ Kugel: } \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = r \cdot \begin{pmatrix} \sin\vartheta\ \cos\varphi \\ \sin\vartheta\ \sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix} \qquad 0 \leq r \leq 2,\ 0 \leq \vartheta \leq \tfrac{\pi}{2},\ 0 \leq \varphi \leq \pi$$

$$I = \int_V f(x,y,z)\ d(x,y,z) = \int_{\tilde{V}} r \sin\varphi \sin\vartheta\ r^2 \sin\vartheta\ d(r,\varphi,\vartheta)\ , \quad \tilde{V} = \{(r,\varphi,\vartheta) \in [0,2] \times [0,\pi] \times [0, \frac{\pi}{2}]\}$$

$$I \overset{\text{Fubini}}{=} \int_{r=0}^{2} \int_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{\varphi=0}^{\pi} r^3 (\sin\vartheta)^2 \sin\varphi\ d\varphi\ d\vartheta\ dr = 2 \cdot \int_0^2 r^3\ dr \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\vartheta)^2\ d\vartheta = 2^3 \cdot \frac{\pi}{4} \overset{(*)}{=} 2\pi$$

(*) Bekanntlich gilt $(\sin t)^2 = 1 - (\cos t)^2$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \underbrace{\sin t}_{u} \cdot \underbrace{\sin t}_{v'} = [\sin t \cdot (-\cos t)]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\, dt =$$

$$= 0 + \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 - \sin^2 t\, dt = [t]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = \frac{\pi}{2} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt$$

$$\Rightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\, dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}$$

Aufgabe II.5

Berechnen Sie alle Lösungen der Differentialgleichung

$$y'''(x) - 5y''(x) + 8y'(x) - 4y(x) = \cos x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Lösungsvorschlag:

Charakteristisches Polynom: $t^3 - 5t^2 + 8t - 4 = (t-1)(t^2 - 4t + 4) = (t-1)(t-2)^2$
$\Rightarrow$ Fundamentalsystem ist $\{e^x,\ e^{2x},\ xe^{2x}\}$.
Ansatz für inhomogene Gleichung: Inhomogenität ist cos $\rightsquigarrow$ trigonom. Ansatz

$$\begin{aligned} y(x) &= \alpha \sin x + \beta \cos x \\ y'(x) &= \alpha \cos x - \beta \sin x \\ y''(x) &= -\alpha \sin x - \beta \cos x \\ y'''(x) &= -\alpha \cos x + \beta \sin x. \end{aligned}$$

Einsetzen: $\sin x(\beta + 5\alpha - 8\beta - 4\alpha) + \cos x(-\alpha + 5\beta + 8\alpha - 4\beta) \stackrel{!}{=} \cos x$

$$\Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -7 & 0 \\ 7 & 1 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -7 & 0 \\ 0 & 50 & 1 \end{array}\right) \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{7}{50} \\ 0 & 1 & \frac{1}{50} \end{array}\right)$$

$\Rightarrow$ allg. Lösung ist:

$$y(x) = \alpha e^x + \beta e^{2x} + \gamma x e^{2x} + \frac{7}{50} \sin x + \frac{1}{50} \cos x$$

Aufgabe II.6

Bestimmen Sie ein Fundamentalsystem für das Differntialgleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} y_1' & = & y_1 & - & y_2 & + & 2y_3 \\ y_2' & = & -y_1 & + & y_2 & + & 2y_3 \\ y_3' & = & y_1 & + & y_2 & & \end{array}$$

Lösungsvorschlag:

Bestimme Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det(A-\lambda I) = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 & 2 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} -\lambda & -\lambda & 4 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} \rightsquigarrow \begin{vmatrix} 0 & 0 & 4-\lambda^2 \\ -1 & 1-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (4-\lambda^2) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 1-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = (2-\lambda)(2+\lambda) \begin{vmatrix} 0 & 2-\lambda \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(2-\lambda)^2(2+\lambda)$$

$$\text{EV zu } \lambda = +2 : \begin{pmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{EV zu } \lambda = -2 : \begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \{v_1, v_2, v_3\} \text{ ist Basis von } \mathbb{R}^3$$

$\Rightarrow$ ein FDS ist $\{e^{2x} \cdot v_1, e^{2x} \cdot v_2, e^{-2x} \cdot v_3\}$.
Probe bestätigt jeweils $y' = \lambda e^{\lambda x} v = e^{\lambda x} A v$

Aufgabe II.7

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$y'''(t) - 3y''(t) + 3y'(t) - y(t) = t^2 e^t, \quad y(0) = 1,\ y'(0) = 0,\ y''(0) = -2.$$

(Hinweis, falls Sie die Laplace-Transformation ($\mathcal{L}$) verwenden wollen:
$\mathcal{L}(e^{\alpha t} f(t))(s) = F(s-\alpha)$ für $F = \mathcal{L}(f)$).

Lösungsvorschlag:

Mit Laplace-Trafo: $\mathcal{L}(t^n)(s) = \frac{n!}{s^{n+1}}, \quad \mathcal{L}(e^{\alpha t} f(t))(s) = F(s-\alpha)$

$$\overset{\mathcal{L}}{\rightsquigarrow} s^3 Y(s) - s^2 y(0) - s y'(0) - y(0) - 3(s^2 Y - s y(0) - y'(0)) + 3(sY - y(0)) - Y = \frac{2!}{(s-1)^3}$$

$$\Leftrightarrow Y(s)(s-1)^3 = \frac{2}{(s-1)^3} + s^2 - 3s + 1$$

$$\Leftrightarrow Y(s) = \frac{2}{(s-1)^6} + \underbrace{\frac{s^2 - 3s + 1}{(s-1)^3}}_{\text{PBZ}}$$

$$\text{PBZ: } \frac{A}{s-1} + \frac{B}{(s-1)^2} + \frac{C}{(s-1)^3} = \frac{A(s^2 - 2s + 1) + B(s-1) + C}{(s-1)^3}$$

$\Rightarrow A = 1; \quad B = -1; \quad C = -1;$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{2}{(s-1)^6} + \frac{1}{s-1} - \frac{1}{(s-1)^2} - \frac{1}{(s-1)^3}$$

$$\Rightarrow y(t) = \left(\frac{t^5}{60} + 1 - t - \frac{t^2}{2}\right) e^t$$

Probe: … löst das AWP. □

mit char. Gl.: $\lambda^3 - 3\lambda^2 + 3\lambda - 1 = (\lambda - 1)^3 \stackrel{!}{=} 0$

$$\text{FS} = \{e^t,\ te^t,\ t^2 e^t\}$$

inhomogene Lsg.:

$$\begin{aligned} y &= At^k e^t \\ y' &= Ae^t(t^k + kt^{k-1}) \\ y'' &= Ae^t(t^k + 2kt^{k-1} + k(k-1)t^{k-2}) \\ y''' &= Ae^t(t^k + 3kt^{k-1} + 3k(k-1)t^{k-2} + k(k-1)(k-2)t^{k-3}) \end{aligned}$$

einsetzen in DGL: $\rightsquigarrow t^{k-3}k(k-1)(k-2) \stackrel{!}{=} t^2 \frac{1}{A}$

$\Rightarrow k = 5, \quad A = \frac{1}{60}$

$y(t) = \left(\frac{t^5}{60} + \alpha + \beta t + \gamma t^2\right) e^t$

Anfangswerte: $y',\ y''$ berechnen $\rightsquigarrow$ liefert obige Lösung (mit mehr Rechnerei).